Задача 1. *Решить систему линейных уравнений:*

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z = 5 \\ x + 3y = 9 \\ 7x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_j$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 7 & -22 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 7R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 7 & -22 \\ 0 & -17 & 2 & -57 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 7 & -22 \\ 0 & -1 & -26 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -26 & 31 \\ 0 & -4 & 7 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -26 & 31 \\ 0 & 0 & 111 & -146 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3/111} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -26 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-146}{111} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 26 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-146}{111} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 26R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{355}{111} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-146}{111} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-22}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{355}{111} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-146}{111} \end{array}\right)$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x = -22/37 \\ y = 355/111 \\ z = -146/111 \end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-22}{37} \\ \frac{355}{111} \\ \frac{-146}{111} \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
По вопросам ввода данных и оплаты обращайтесь к Flash.
Программу – учебное пособие разработал Артём Берлинков.