

Задача 1. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу, путём проведения элементарных преобразований.

Решение:

Напоминание: для нахождения обратной матрицы справа к ней следует дописать единичную и, подвергая первую элементарным преобразованиям над её строками, попытаться сделать из неё единичную матрицу. Если это удалось, то дописанная справа единичная матрица, подвергнутая тем же преобразованиям, и будет обратной. Если привести матрицу к единичной таким способом не удаётся, то обратной у неё не существует.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

- (а) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
- (б) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \rightarrow rR_j$),
- (в) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \rightarrow R_i - rR_j$),

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -25 & 1 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 8R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -25 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -27 & -54 & 0 & -8 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -25 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -17 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -17 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 81 & -27 & 20 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3/81} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -17 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{20}{81} & \frac{11}{81} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{20}{81} & \frac{11}{81} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 17R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-16}{81} & \frac{-25}{81} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{20}{81} & \frac{11}{81} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 7R_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{-59}{81} & \frac{-77}{81} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-16}{81} & \frac{-25}{81} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{20}{81} & \frac{11}{81} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{5}{81} & \frac{23}{81} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-16}{81} & \frac{-25}{81} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{20}{81} & \frac{11}{81} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ответ: обратная матрица равна

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{81} & \frac{23}{81} \\ \frac{2}{3} & -\frac{16}{81} & -\frac{25}{81} \\ -\frac{1}{3} & \frac{20}{81} & \frac{11}{81} \end{pmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

По вопросам ввода данных и оплаты обращайтесь к Flash.

Программу – учебное пособие разработал Артём Берликов.