

Задача 1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

- (а) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
- (б) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \rightarrow rR_j$),
- (с) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \rightarrow R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапецевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапецевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.