Задача 1. *Решить систему линейных уравнений:*

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+z=0 \\ x+4y+2z=2 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение:

Если систему уравнений записать в виде

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и определитель квадратной матрицы A, Δ, не равен нулю, то значение переменной x_i можно найти как $\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной из A путём замены i-го столбца на столбец из правой части (из чисел $b_1, \ldots, b_n$). Это называется формулами Крамера.

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= 0 + 1 + 4 - 2 - 8 = -5.$$

Матрица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= 0 + 2 - 12 = -10.$$

Таким образом

$$x = \frac{-10}{-5} = 2.$$

Матрица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 =$$
$$= 0 + 3 + 2 - 6 - 4 = -5.$$

Таким образом

$$y = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Матрица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \cdot 2 =$$
$$= 0 + 12 - 2 = 10.$$

Таким образом

$$z = \frac{10}{-5} = -2.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.