

**Задача 1.** Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 5x + z = 21 \\ x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

*Решение:*

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и определитель квадратной матрицы  $A$ ,  $\Delta$ , не равен нулю, то значение переменной  $x_i$  можно найти как  $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где  $\Delta_i$  – определитель матрицы, полученной из  $A$  путём замены  $i$ -го столбца на столбец из правой части (из чисел  $b_1, \dots, b_n$ ). Это называется формулами Крамера.

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 1 \cdot 2 =$$
$$= 0 - 1 - 25 - 4 = -30.$$

Матрица

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 0 \\ 21 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\det \Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 0 \\ 21 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \cdot 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 21 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 21 \cdot (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 1 \cdot 11 =$$
$$= 0 - 3 - 105 - 22 = -130.$$

Таким образом

$$x = \frac{-130}{-30} = 13/3.$$

Матрица

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 5 & 21 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{aligned} \det \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 5 & 21 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 21 \cdot (-5) + 11 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 21 \cdot 0 - 5 \cdot 11 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -210 + 11 + 275 - 6 = 70. \end{aligned}$$

Таким образом

$$y = \frac{70}{-30} = -7/3.$$

Матрица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 \\ 5 & 0 & 21 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем её определитель:

$$\begin{aligned} \det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 \\ 5 & 0 & 21 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 21 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 11 - 1 \cdot 0 \cdot 11 - 5 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 21 \cdot 2 = \\ &= 0 - 21 + 110 + 15 - 84 = 20. \end{aligned}$$

Таким образом

$$z = \frac{20}{-30} = -2/3.$$

**Ответ:** система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.