Задача 1. *Решить систему линейных уравнений:*

$$\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 5x + z = 21 \\ x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$$

с использованием обратной матрицы.

Решение:

Если систему уравнений записать в виде

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

и квадратная матрица A обратима, то, обозначая матрицу, обратную к A, через A^{-1}, решение системы можно получить путём умножения обратной матрицы на столбец из правой части, т.е.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу системы через

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Из чисел справа от знака равенства получаются

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

У матрицы существует обратная тогда и только тогда, когда её определитель, Δ, не равен нулю. Если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то обратной матрицей является } \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, равно $(-1)^{i+j}\det\Delta_{ij}$. Δ_{ij} – матрица размером 2x2, получающаяся вычёркиванием из первоначальной матрицы i-ой строки и j-го столбца.

Подсчитаем определитель матрицы, Δ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= 0 - 1 - 25 - 4 = -30.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-5) - 2 \cdot 1 = -2.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 1 = -26.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 1-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 10.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 0 = 5.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 0 = -10.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 2-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 5.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 1-ого столбца:

$$\det\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 2-ого столбца:

$$\det\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 2.$$

Подсчитаем определитель матрицы, полученной вычёркиванием 3-ой строчки и 3-ого столбца:

$$\det\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) = 5.$$

Таким образом обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 26 & -10 & -2 \\ 10 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} \\ \frac{-13}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

Для получения ответа перемножим полученную обратную матрицу и столбец чисел из правой части. Умножение матрицы на вектор производится также, как и умножение матрицы на матрицу. Произведение двух матриц определено только если количество столбцов в первой совпадает с количеством строк во второй матрице. В этом случае элемент матрицы, являющейся их произведением, который стоит в i-ой строчке им j-том столбце получается из произведения i-ой строчки первой матрицы на j-ый столбец второй матрицы. Произведение строчки на столбец вычисляется как сумма произведений одноимённых элементов.

Произведение первой строки на первый столбец: $\left(\frac{1}{15}\right) \cdot 11 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 21 + \left(\frac{1}{30}\right) \cdot 3 = 13/3.$

Произведение второй строки на первый столбец: $\left(\frac{-13}{15}\right) \cdot 11 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 21 + \left(\frac{1}{15}\right) \cdot 3 = -7/3.$

Произведение третьей строки на первый столбец: $\left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 11 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 21 + \left(\frac{-1}{6}\right) \cdot 3 = -2/3.$

$$A^{-1} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} \\ \frac{-13}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.