Задача 1. *Найти площадь $\triangle ABC$ через векторное произведение, где координаты точек $A(1,5,-2)$, $B(-2,0,3)$ и $C(3,-2,4)$.*

Решение: Векторное произведение двух векторов является вектором, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на первые два.

Так как на те же 2 вектора вместо параллелограмма можно натянуть треугольник, и его площадь будет в 2 раза меньше, то в качестве ответа можно взять половину длины векторного произведения сторон треугольника.

Подсчитаем векторное произведение сторон:

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -5 & 5 \\ 2 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left((-5)\cdot 6 - (-7)\cdot 5\right) - \vec{j}\left((-3)\cdot 6 - 2\cdot 5\right) + \vec{k}\left((-3)\cdot(-7) - 2\cdot(-5)\right) =$$

$$= 5\vec{i} + 28\vec{j} + 31\vec{k}.$$

Длина вектора

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 28^2 + 31^2} = \sqrt{1770}.$$

Отсюда площадь треугольника равна $\sqrt{1770}/2$.

Ответ: площадь треугольника равна $\sqrt{1770}/2$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.