

Задача 1. Найти объём треугольной пирамиды $ABCD$ через смешанное произведение, где координаты точек $A(5, 5, 10)$, $B(7, 2, 18)$, $C(4, 4, 8)$ и $D(5, 1, 4)$.

Решение: Смешанным произведением трёх векторов является число, по модулю равное объёму параллелепипеда, натянутого на эти три вектора. Знак числа "+", если эти три вектора образуют правую тройку векторов, и "-", если левую.

Объём параллелепипеда иначе можно посчитать как площадь основания, умноженную на длину высоты. На те же три вектора вместо параллелепипеда можно натянуть треугольную пирамиду. У пирамиды объём составляет $1/3$ площади основания пирамиды, умноженной на высоту пирамиды. В этой ситуации длины высот пирамиды и параллелепипеда равны, а основание пирамиды по площади в 2 раза меньше (треугольник – половина параллелограмма). Поэтому объём пирамиды будет в 6 раз меньше объёма соответствующего параллелепипеда. Поэтому для нахождения объёма пирамиды достаточно разделить на 6 модуль смешанного произведения трёх векторов из одной её вершины в остальные.

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{D} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} \\ \vec{AC} &= \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \vec{AB} &= \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Вычислить смешанное произведение трёх векторов можно, подсчитав определитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координаты первого вектора, во второй – второго, а в третьей – координаты третьего вектора.

Подсчитаем определитель соответствующей матрицы:

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot (-6) + (-3) \cdot (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) \cdot 8 - 0 \cdot (-1) \cdot 8 - (-1) \cdot (-3) \cdot (-6) - (-4) \cdot (-2) \cdot 2 = \\ &= 12 + 32 + 18 - 16 = 46.\end{aligned}$$

Поэтому смешанное произведение $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 46$. Отсюда объём пирамиды равен $23/3$.

Ответ: объём треугольной пирамиды равен $23/3$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.