Задача 1. *Найти площадь* $\triangle ABC$ *через векторное произведение, где координаты точек* $A(1,-1,3)$, $B(3,-1,1)$ *и* $C(-1,1,3)$.

Решение: Векторное произведение двух векторов является вектором, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на первые два.

Так как на те же 2 вектора вместо параллелограмма можно натянуть треугольник, и его площадь будет в 2 раза меньше, то в качестве ответа можно взять половину длины векторного произведения сторон треугольника.

Подсчитаем векторное произведение сторон:

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Вычислить векторное произведение в трёхмерном пространстве можно, подсчитав псевдоопределитель матрицы, в которой в первой строчке стоят координатные орты, а во второй и третьей - координаты первого и второго векторов соответственно.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(0 \cdot 0 - 2 \cdot (-2)) - \vec{j}\,(2 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2)) + \vec{k}\,(2 \cdot 2 - (-2) \cdot 0) =$$

$$= 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Длина вектора

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}.$$

Отсюда площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$.

Ответ: площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.