Задача 1. *Найти площадь $\triangle ABC$ с использованием скалярного произведения, где координаты точек $A(1,-1,3)$, $B(3,-1,1)$ и $C(-1,1,3)$.*

Решение: Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, опущенную на него.

Подсчитаем длину высоты в треугольнике из точки B на основание AC.

Если взять вершину треугольника и опустить из неё высоту на противоположную сторону, то получится прямоугольный треугольник, в котором высота будет катетом, гипотенузой – одна из двух сторон треугольника, с вершиной откуда опускали высоту, и другим катетом - проекцией гипотенузы на сторону, куда опустили высоту.

Поэтому по теореме Пифагора, чтобы найти высоту, достаточно найти длину гипотенузы и длину её проекции (другой катет).

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Одна из геометрических интерпретаций скалярного произведения двух векторов заключается в том, что его модуль равен длине одного вектора, умноженной на длину проекции на него второго вектора. Отсюда получаем, что чтобы узнать длину проекции, надо модуль скалярного произведения разделить на длину вектора, на который происходит проекция.

Скалярным произведением двух векторов является число, равное сумме попарных произведений одноимённых координат.

Скалярное произведение векторов

$$\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 = -4$$

Длина вектора

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}.$$

Длина проекции вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$:

$$\left|\vec{AB}_{\vec{AC}}\right| = \frac{\left|\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)\right|}{\left|\vec{AC}\right|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Расстояние между точками A и B равно $\sqrt{(3-1)^2 + ((-1)-(-1))^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.
По теореме Пифагора длина высоты равна $\sqrt{8-2} = \sqrt{6}$. Из вышеизложенного видно, что длина основания,

$$|AC| = |\vec{AC}| = 2\sqrt{2}.$$

Отсюда площадь треугольника равна

$$\frac{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.