Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 2x + 3z - 4t = 15 \\ -y + 5z + t = -13 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 34x - 21y + z - 10t = -1 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 34 & -21 & 1 & -10 & -1 \end{array}\right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 34 & -21 & 1 & -10 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & -3 \\ 34 & -21 & 1 & -10 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 17R_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -21 & -50 & 58 & -256 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & -42 \\ 0 & -21 & -50 & 58 & -256 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3/2}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -21 \\ 0 & -21 & -50 & 58 & -256 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 21R_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -21 \\ 0 & 0 & -155 & 37 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 19R_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -21 \\ 0 & 0 & -3 & 113 & -382 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_4} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & 230 & -785 \\ 0 & 0 & -3 & 113 & -382 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & 230 & -785 \\ 0 & 0 & -1 & 343 & -1167 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 343 & -1167 \\ 0 & 0 & 2 & 230 & -785 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_3}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&-4&|&15\\0&-1&5&1&|&-13\\0&0&-1&343&|&-1167\\0&0&0&916&|&-3119\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4/916}\begin{pmatrix}2&0&3&-4&|&15\\0&-1&5&1&|&-13\\0&0&-1&343&|&-1167\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&-4&|&15\\0&1&-5&-1&|&13\\0&0&-1&343&|&-1167\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to -R_3}\begin{pmatrix}2&0&3&-4&|&15\\0&1&-5&-1&|&13\\0&0&1&-343&|&1167\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+343R_4}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&-4&|&15\\0&1&-5&-1&|&13\\0&0&1&0&|&-845/916\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_4}\begin{pmatrix}2&0&3&-4&|&15\\0&1&-5&0&|&8789/916\\0&0&1&0&|&-845/916\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+4R_4}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&0&|&316/229\\0&1&-5&0&|&8789/916\\0&0&1&0&|&-845/916\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+5R_3}\begin{pmatrix}2&0&3&0&|&316/229\\0&1&0&0&|&1141/229\\0&0&1&0&|&-845/916\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&|&3799/916\\0&1&0&0&|&1141/229\\0&0&1&0&|&-845/916\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1/2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&|&2.074\\0&1&0&0&|&1141/229\\0&0&1&0&|&-845/916\\0&0&0&1&|&-3119/916\end{pmatrix}$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases}x=2.074\\y=1141/229\\z=-845/916\\t=-3119/916\end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.074\\1141/229\\-845/916\\-3119/916\end{bmatrix},$$

где произвольные вещественные числа.

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.