Задача 1. *Вычислить определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

путём проведения элементарных преобразований.

Решение:

Напоминание: для вычисления определителя квадратной матрицы можно использовать элементарные преобразования как над строчками, так и над столбцами матрицы в силу того, что определитель матрицы совпадает с определителем транспонированной матрицы.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$) (при данном преобразовании определитель матрицы умножается на -1),

(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$) (при данном преобразовании определитель матрицы умножается на r),

(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$) (при данном преобразовании определитель матрицы не меняется).

Ввиду того, что определитель матрицы совпадает с определителем транспонированной матрицы, те же самые операции с тем же эффектом можно производить и над столбцами (тогда в обозначении производимой операции буква R заменяется на букву C).

Цель заключается в приведении матрицы к верхнетреугольному или нижнетреугольному виду, определитель которой есть произведение диагональных элементов, а каков определитель первоначальной матрицы можно определить, следя за ходом проведённых операций.

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\det\times(-1)]{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3 \to R_3 - 7R_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & -29 & -41 \\ 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 - 7R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & -29 & -41 \\ 0 & 13 & 23 & -24 & -39 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5 \to R_5 + 7R_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & -29 & -41 \\ 0 & 13 & 23 & -24 & -39 \\ 0 & -7 & -23 & 30 & 33 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_3 \to R_3 - 15R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & -59 & -56 \\ 0 & 13 & 23 & -24 & -39 \\ 0 & -7 & -23 & 30 & 33 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4 \to R_4 - 13R_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & -59 & -56 \\ 0 & 0 & 23 & -50 & -52 \\ 0 & -7 & -23 & 30 & 33 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5 \to R_5 + 7R_2}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&23&-50&-52\\0&0&-23&44&40\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_4\to R_4-R_3}\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&0&9&4\\0&0&-23&44&40\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5\to R_5+R_3}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&0&9&4\\0&0&0&-15&-16\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5\to R_5+R_4}\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&0&9&4\\0&0&0&-6&-12\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times\frac{-1}{6}]{R_5\to -R_5/6}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&0&9&4\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}\xrightarrow[\det\times(-1)]{R_4\leftrightarrow R_5}\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&0&1&2\\0&0&0&9&4\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{det неизмен.}]{R_5\to R_5-9R_4}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&-2&4&5\\0&1&0&2&1\\0&0&23&-59&-56\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&-14\end{vmatrix}$$

Определитель треугольной матрицы (т.е. такой, у которой либо под, либо над главной диагональю все элементы равны 0) равен произведению диагональных элементов.

Поскольку получившейся матрицы определитель равен -322 , и при проведении операций определитель первоначальной матрицы умножился на $-1/6$, то определитель первоначальной матрицы равен 1932.

Ответ: определитель равен 1932.

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.