1. Являются ли метрикой на вещественной прямой следующие функции:

а) $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$; б) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$; в) $\rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$?

2. Пусть $\rho(m,n)=\begin{cases}1+(m+n)^{-1}, & m\neq n,\\ 0, & m=n,\end{cases}$ $m,n\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел). Докажите, что пара $(\mathbb{N},\rho)$ – метрическим пространством?

3. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Докажите, что функции $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $\rho_2(x,y)=\ln\left(1+\rho(x,y)\right)$, $\rho_3(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$ также являются метриками.

4. В пространстве $C[0,2]$ найдите расстояние между функциями:

а) $x(t)=2\sin\pi t$, $y(t)=2\cos\pi t$; б) $x(t)=t^2$, $y(t)=6t$.

5. В пространствах $C[0,2]$, $C_1[0,2]$, $C_2[0,2]$ найдите расстояние между функциями:

а) $x(t)=t^2$, $y(t)=3t+4$; б) $x(t)=t^2-8t-1$, $y(t)=-4t+3$.

6. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ функционал:

а) $\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$; б) $\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$; в) $|x(b)-x(a)|+\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$?

7. Будет ли замкнутым в пространстве $C[a,b]$ множество всех многочленов степени:

а) $\leq k$; б) $=k$?

8. Найдите пределы последовательностей $x_n(t)=\dfrac{nt}{1+n^2t^2}$ в $C[0,1]$ и $C_1[0,1]$.

9. Сходится ли последовательность $\{x_n\}$, $x_n=(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,\dots)$, в пространстве l_3?

10. Компактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0,1]$:

а) $\left\{t^n : n\in\mathbb{N}\right\}$; б) $\left\{n(1-\cos(\frac{1}{n}t)) : n\in\mathbb{N}\right\}$; в) $\left\{\sin(n+t) : n\in\mathbb{N}\right\}$;

г) $\{\sin\alpha t : \alpha\in\mathbb{R}\}$; е) $\{\sin\alpha t : \alpha\in[1,2]\}$.

11. Найдите приближенное решение уравнения методом последовательных приближений, подобрав параметр, гарантирующий сжимаемость отображения:

а) $\dfrac{1}{x}=x^2+3x$; б) $5x^3-20x+3=0$.

12. Является ли отображение $\begin{cases}y_1=0,1x_1-0,3x_2,\\ y_1=0,4x_1+0,1x_2\end{cases}$ сжимающим в $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbb{R}^2_2$, $\mathbb{R}^2_\infty$?

13. Следующие системы преобразуйте так, чтобы их можно было решить итерационным методом:

а) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ x-3y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ x+2y=3; \end{cases}$

Сделайте три итерации методом последовательных приближений. Найдите абсолютную и относительную ошибки найденных приближенных решений.

14. Докажите, что оператор $Ax(t)=\lambda\int_0^t x(s)\,ds+1$ при $|\lambda|<1$ является сжимающим в $C[0,1]$. Найдите неподвижную точку этого оператора при $\lambda=0,5$. Сделайте три итерации методом последовательных приближений $(x_0(t)\equiv 0)$. Найдите относительную и абсолютную погрешности найденных приближенных решений.

15. Докажите, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найдите их нормы:

а) $f(x)=\frac{1}{3}\big(x(-1)+x(1)\big)$; б) $f(x)=2\big(x(1)-x(0)\big)$; в) $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)dt$;

г) $f(x)=\int\limits_{-1}^1 x(t)dt-x(0)$; д) $f(x)=\int\limits_{-1}^1 tx(t)dt$.

16. Дан оператор $Ax(t)=3x(t)+(7t-3)x'(t)+\int\limits_0^t(4s-3)x''(s)ds$ в пространстве P^2 многочленов степени ≤ 2. Проверьте, что $A:P^2\to P^2$ линейный оператор и найдите:

а) матрицу этого оператора в каноническом базисе $\{1,t,t^2\}$;

б) матрицу этого оператора в базисе $\{1-2t,3t+t^2,2+3t^2\}$;

в) ядро $\mathrm{Ker}A$ оператора A;

г) ядро $\mathrm{Ker}A$ оператора $A:C^2[0,1]\to C^2[0,1]$.

17. Докажите, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найдите их нормы:

а) $A:\mathbb{R}_2^3\to\mathbb{R}_2^3$, $A(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,0)$;

б) $A:C[-1,1]\to C[-1,1]$, $Ax(t)=\int_{-1}^t x(s)ds-\int_0^1 sx(s)ds$;

в) $A:C_1[0,1]\to C_1[0,1]$, $Ax(t)=x\left(\sqrt{t}\right)$; г) $A:C_2[0,1]\to C_2[0,1]$, $Ax(t)=t\int_0^1 x(s)ds$.

18. Определите, при каких $(\lambda_1,\lambda_2,...)$ оператор $A:l_2\to l_2$, $A(x_1,x_2,...)=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,...)$ является ограниченным, и найдите его норму в этом случае.

19. Найдите норму оператора $A:X\to X$, $Ap(t)=p'(t)+\int_0^1 p(s)ds$, если:

а) $X=(P^1[0,1],\|\ \|_2)$, $\|x\|_2=\sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}$; б) $X=(P^1[0,1],\|\ \|_\infty)$, $\|x\|_\infty=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$.

<u>Указание</u>. Решите соответствующую оптимизационную задачу: $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$, $x(t)=at+b\in P^1[0,1]$.

20. Найдите норму матричного оператора $A:\mathbb{R}_2^3\to\mathbb{R}_2^3$ (в евклидовой метрике):

а) $A=\begin{pmatrix}15&0&0\\0&9&-2\\0&-2&6\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-5&7&-4\\15&3&12\\1&1&8\end{pmatrix}$.

21. Исследуйте последовательность операторов $\{A_n\}\subseteq L(X,X)$ на поточечную и равномерную (по норме) сходимость в следующих случаях:

а) $X=l_2$, $A_nx=(x_1,...,x_n,0,...)$, $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$;

б) $X=l_2$, $A_nx=(x_{n+1},x_{n+2},0,...)$, $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$;

в) $X = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = t^n (1-t)x(t)$, $t \in [0,1]$;

г) $X = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(s)ds$, $t \in [0,1]$;

д) $X = C[0,1]$, $(A_n x)(t) = t^n x(t)$, $t \in [0,1]$.

22. Покажите эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ в конечномерном нормированном пространстве X, т.е. найдите такие положительные константы c_1 и c_2, чтобы для любой пары норм $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ выполнялось двойное неравенство $c_1\|x\|' \le \|x\|'' \le c_2\|x\|'$ для всех $x \in X$.

23. Покажите, что нормы $\|x\|_C = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$ и $\|x\|_{C_1} = \int_0^1 |x(t)|dt$ не эквивалентны в пространстве $C[0,1]$. <u>Указание</u>: исследуйте на сходимость в этих нормах последовательность $x_n(t) = t^n$.

24. Докажите, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 e^{s+t} x(s)ds$ имеет ограниченный обратный оператор A^{-1} и найдите его.

25. Решите интегральное уравнение $x(t) - \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds = y(t)$ в классе $C[0,\pi]$.

26. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds$.

27. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = x''(t)$, если оператор определен на множестве $D(A) = \{x \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi], x(0) = x(\pi) = 0\}$.

28. Найдите спектр $\sigma(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ оператора $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$ в пространстве $C[0,1]$.

29. Какие из следующих операторов $A : C[0,1] \to C[0,1]$ являются компактными:

а) $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$; б) $Ax(t) = tx(t)$; в) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

г) $Ax(t) = \int_0^t e^{ts} x(s)ds$; д) $Ax(t) = x(t^2)$.

30. Покажите, что следующие отображения являются дифференцируемыми и найдите их сильные производные:

а) $f : \mathbb{R}_2^3 \to \mathbb{R}_2^3$, $\begin{cases} y_1 = 2x_1^2 + x_1x_2^2 - x_1x_3, \\ y_2 = x_1x_2 - 3x_2^2 + x_1x_3^2, \\ y_3 = 2x_1^2x_3^2 - 4x_2^2x_3, \end{cases}$ в точке $(1,1,1)$;

б) $f : C[0,1] \to C[0,1]$, $f(x(t)) = \int_0^t x^2(s)ds$;

в) $f : C[0,1] \to C[0,1]$, $f(x(t)) = \int_0^t k(x(s))ds$ $(k(t) \in C^1[0,1])$.

31. Найдите оператор, сопряженный к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если:

а) $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$; б) $Ax(t) = tx(t)$; в) $Ax(t) = t\int_0^1 x(s)ds$.

32. Найдите оператор, сопряженный к оператору $A : l_1 \to l_1$, если:

а) $Ax = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$; б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, $|\lambda_n| \le 1\ \forall n$;

в) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$; г) $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$.