0.1 Равновесие дрожащей руки[1].

Вспомним простой пример, с которого мы начали рассмотрение динамических игр:

		Игрок 1			
		TT	TN	NT	NN
Игрок 2	T	0,0	-5,10	0,0	-5,10
	N	10,-5	-10,-10	10,-5	-10,-10

Без подсказки довольно трудно узнать за этой матрицей выигрышей «лобовую атаку» (см. стр. ...), ещё сложнее восстановить свойство совершенства по подыграм. Тем не менее, закрадывается подозрение, что не все равновесия тут равнозначны (напомним равновесными в этой игре будут профили: $(\mathtt{N}, \mathtt{TT})$, $(\mathtt{N}, \mathtt{NT})$ и $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$). Но как отличить «хорошие» равновесия от «плохих»? Возможно ли восстановить совершенные равновесия не зная структуры подыгр?

Ответ на последний вопрос утвердительный. Основная идея — предположить, что игроки иногда ошибаются, то есть с некой малой вероятностью выбирают неравновесные стратегии. Тогда вероятность попадания в каждую из подыгр положительна, следовательно, несовершенные по подыграм равновесия перестанут устраивать игроков. Впрочем, не они одни: и среди совершенных по подыграм равновесий находятся «чёрные овцы» — в дальнейшем будут рассмотрены соответствующие примеры. А пока попробуем формализовать совершенное равновесие.

Рассмотрим игру в нормальной форме:

$$G = \langle \mathrm{N},\ \{s_i \in S_i\}_{i \in \mathrm{N}},\ \{u_i(s)\}_{i \in \mathrm{N}} \rangle. \tag{1}$$

Будем считать эту игру конечной — то есть множество игроков конечно и множество стратегий каждого игрока тоже конечно.

Определение 1. *Профиль смешанных стратегий $\sigma \in \Delta(S)$ в игре (1) называется вполне смешанным, если любая чистая стратегия любого игрока играется с положительной вероятностью.*

В дальнейшем мы будем говорить не только о вполне смешанном профиле стратегий, но и о вполне смешанной стратегии i-го игрока как элементе этого профиля.

Определение 2. *Профиль смешанных стратегий σ^ε называется ε-ограниченным равновесием в игре (1), если:*

1. *вероятность использования i-ым игроком чистой стратегии $s_i \in S_i$ не меньше $\varepsilon(s_i)$: $\forall i \in \mathrm{N}$ $\forall s_i \in S_i$ $\sigma_i^\varepsilon(s_i) \geqslant \varepsilon(s_i)$. Здесь числа $\varepsilon(s_i)$ должны удовлетворять условию: $0 < \varepsilon(s_i) < \varepsilon$ (отсюда автоматически следует, что σ^ε — вполне смешанный профиль стратегий),*

2. *смешанная стратегий i-го игрока является наилучшим ответом на действия остальных (с учётом 1.):*
$$\sigma_i^\varepsilon \in \operatorname*{Argmax}_{\sigma_i \in \Delta^\varepsilon(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^\varepsilon);$$
здесь $\Delta^\varepsilon(S_i)$ — множество вполне смешанных стратегий i-го игрока, причём таких, что минимальная вероятность выбора чистой стратегии s_i составляет $\varepsilon(s_i)$.

Утверждение 1. *Можно выбрать $\varepsilon^0 > 0$ такое, что $\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ ε-ограниченное равновесие существует.*

Доказательство утверждения 1.

Так как множество чистых стратегий каждого игрока конечно, то можно выбрать ε^0 достаточно малым, чтобы множество $\Delta^\varepsilon(S_i)$ было непустым (достаточно взять $\varepsilon^0 < \frac{1}{\max\limits_{i \in \mathrm{N}} |S_i|}$). Кроме того $\Delta^\varepsilon(S_i)$ будет выпуклым и компактным — остаётся лишь слово в слово повторить доказательство теоремы Нэша (ссылка?), заменяя везде $\Delta(S_i)$ на $\Delta^\varepsilon(S_i)$. **Q.E.D.**

Теперь дадим определение совершенного равновесия:

Определение 3. *Профиль стратегий σ^* называется совершенным равновесием, если существует такая последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon^0 > \varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, что σ^* будет пределом некоторой последовательности ε_k-ограниченных равновесий:*

$$\sigma^* = \lim_{k \to \infty} \sigma^{\varepsilon_k}.$$

[1] Излагается по монографии Fudenberg, Tirole. Game Theory.

Заметим, что для разных последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ могут получаться разные совершенные равновесия. Если мы потребуем, чтобы предел был один и тот же для любых последовательностей $\{\varepsilon_k\}$, то получится ещё более сильное равновесие, к сожалению, далеко не всегда существующее.

Утверждение 2. *В игре* (1) *существует по крайней мере одно совершенное равновесие.*

Доказательство утверждения 2.

Множество всех смешанных профилей компактно (как декартово произведение конечного числа компактных множеств). По определению компактности, из любой последовательности точек компактного множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Выбрав такую подпоследовательность из $\{\sigma^{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, получим σ^* в качестве её предела. **Q.E.D.**

Выведем основные свойства совершенного равновесия: их удобно задать в виде альтернативных определений.

Определение 4. *Профиль стратегий σ^* называется совершенным равновесием, если существует такая последовательность вполне смешанных профилей стратегий $\{\sigma^k\}_{k\in\mathbb{N}} \to \sigma^*$, что для всех чистых стратегий i-го игрока выполнено:*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^k) \geqslant u_i(s_i, \sigma_{-i}^k) \quad (i \in \mathrm{N}).$$

В этом определении требуется, чтобы совершенно равновесная стратегия i-го игрока σ_i^* была наилучшим ответом на некоторую последовательность таких профилей (σ_{-i}^k), сходящуюся к (σ_{-i}^*), а не на профиль равновесных стратегий оставшихся игроков (σ_{-i}^*). Как и в случае определения 3, условие «наилучшего ответа» должно быть выполнено лишь для некоторой последовательности, а не для любой.

Для того, чтобы ввести ещё одно определение совершенного равновесия, понадобится вспомогательное понятие.

Определение 5. *Профиль стратегий σ^ϵ называется ϵ-совершенным равновесием, если*

1. *он является вполне смешанным,*
2. $\forall i \in \mathrm{N}$, $\forall s_i \in S_i$, *если существует такое $s_i' \in S_i$, что*

   $$u_i(s_i, \sigma_{-i}^\epsilon) < u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon),$$

   то $\sigma_i^\epsilon(s_i) < \epsilon$.

Здесь не задана минимальная мера вероятности, с которой играются чистые стратегии каждого из игроков и не требуется, чтобы равновесная стратегий была наилучшим ответом на профиль стратегий других игроков (как в ε-ограниченном равновесии 2), но требуется, чтобы «неэффективные» стратегии игрались с малой вероятностью. Определим совершенное равновесие как предел ϵ-совершенных.

Определение 6. *Профиль стратегий σ^* называется совершенным равновесием, если существует такая последовательность $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\epsilon^0 > \epsilon_k > 0$, $\epsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, что σ^* будет пределом последовательности ϵ_k-совершенных равновесий:*

$$\sigma^* = \lim_{k\to\infty} \sigma^{\epsilon_k}$$

Опять же, выбирая разные последовательности мы будем получать различные равновесия. Теперь докажем эквивалентность введённых определений.

Теорема 1. *Определения 3, 4, 6 совершенного равновесия эквивалентны.*

Доказательство теоремы 1.

Докажем, что из определения 3 следует определение 6, из 6 — 4, и, замыкая круг, из 4 следует 3.

3$\Rightarrow$ **6**. Пусть в игре (1) σ^ε — ε-ограниченное равновесие. Докажем, что оно будет ϵ-совершенным (при $\epsilon = \varepsilon$). Первое свойство определения 5 выполняется автоматически, а второе следует из свойств максимума линейной функции: пусть для каких-то двух чистых стратегий i-го игрока s_i' и s_i'' выполненяется

$u_i(s'_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) < u_i(s''_i, \sigma^\varepsilon_{-i})$. Тогда предположив, что $\sigma^\varepsilon_i(s'_i) > \varepsilon$ ($\sigma^\varepsilon_i \in \operatorname*{Argmax}_{\sigma_i \in \Delta^\varepsilon(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma^\varepsilon_{-i})$), задав модифицированную смешанную стратегию i-игрока

$$\bar{\sigma}_i(s_i) = \begin{cases} \sigma^\varepsilon(s_i), & \text{если } s_i \neq s'_i,\ s_i \neq s''_i, \\ \varepsilon, & \text{если } s_i = s'_i, \\ \sigma^\varepsilon_i(s''_i) + \sigma^\varepsilon_i(s'_i) - \varepsilon, & \text{если } s_i = s''_i, \end{cases}$$

(заметим, что $\bar{\sigma}_i \in \Delta^\varepsilon(S_i)$) и использовав неравенство

$$\begin{cases} u_i(s'_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) < u_i(s''_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) \\ \sigma^\varepsilon_i(s'_i) > \varepsilon \end{cases} \Rightarrow (\sigma^\varepsilon_i(s'_i) - \varepsilon) u_i(s'_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) < (\sigma^\varepsilon_i(s'_i) - \varepsilon) u_i(s''_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^\varepsilon_i(s'_i) u_i(s'_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) + \varepsilon u_i(s''_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) < \varepsilon u_i(s'_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) + \sigma^\varepsilon_i(s'_i) u_i(s''_i, \sigma^\varepsilon_{-i}),$$

получим:

$$u_i(\sigma^\varepsilon) < u_i(\bar{\sigma}_i, \sigma^\varepsilon_{-i}).$$

Это противоречит тому, что

$$\sigma^\varepsilon_i \in \operatorname*{Argmax}_{\sigma_i \in \Delta^\varepsilon(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma^\varepsilon_{-i}).$$

Для завершения доказательства этого пункта остаётся лишь заметить, что в случае полного совпадения сходящихся последовательностей их пределы равны.

6$\Rightarrow$ **4**. Пусть выполнено определение 6. Тогда, используя свойства предела последовательности, разобьём все чистые стратегии i-го игрока на два класса: те, для которых $\sigma^{\epsilon_k}_i(s_i) > d$ для всех $k \geqslant k_0$, причём постоянная d не зависит от k (обозначим этот класс как S'_i), и те, для которых $\sigma^{\epsilon_k}_i(s_i) \to 0$ при $k \to \infty$ (обозначим этот класс как S''_i). Заметим, что $\sigma^*_i \in \Delta(S'_i)$ по определению предела последовательности. Множество S'_i непусто в силу конечности числа стратегий i-го игрока и того, что $\sum\limits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$. Тогда любая стратегия i-го игрока s'_i из множества S'_i должна быть наилучшим ответом на профиль смешанных стратегий других игроков $\sigma^{\epsilon_k}_{-i}$ при $k \geqslant k_0$, т.е.:

$$s'_i \in \operatorname*{Argmax}_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma^{\epsilon_k}_{-i}) \qquad (k \geqslant k_0).$$

Действительно, иначе существовала бы такая смешанная стратегий $\bar{\sigma}_i \in \Delta(S_i)$, что $u_i(\bar{\sigma}_i, \sigma^{\epsilon_k}_{-i}) > u_i(s'_i, \sigma^{\epsilon_k}_{-i})$. Но отсюда следует существование чистой стратегии i-го игрока $\bar{s}_i \in S_i$, для которой выполнено:

$$u_i(\bar{s}_i, \sigma^{\epsilon_k}_{-i}) > u_i(s'_i, \sigma^{\epsilon_k}_{-i}).$$

А тогда согласно определению 6, выполняется $\sigma^{\epsilon_k}_i(s'_i) < \epsilon_k$ и не может быть такого, что $\sigma^{\epsilon_k}_i(s'_i) > d$. Противоречие.

Так как любая стратегий из множества S'_i является наилучшим ответом на последовательность профилей $\sigma^{\epsilon_k}_{-i}$ при $k \geqslant k_0$, то $\sigma^*_i \in \Delta(S'_i)$ тоже является наилучшим ответом на любой элемент данной последовательности.

4$\Rightarrow$ **3**. Пусть согласно определению 4 последовательность профилей $\{\sigma_k\}$ сходится при $k \to \infty$ к совершенно равновесному профилю σ^*. Снова разобьём все стратегии i-го игрока на два класса. Пусть $s_i \in S'_i$ если $\sigma^*(s_i) > 0$ и $s_i \in S''_i$ иначе. Заметим, что класс S'_i непуст. Тогда определим последовательность $\varepsilon'_k(s_i)$ таким образом:

$$\varepsilon'_k(s_i) = \begin{cases} 1/k, & \text{если } s_i \in S'_i, \\ \sigma^n(s_i), & \text{если } s_i \in S''_i. \end{cases}$$

$$\varepsilon'_k = \max_{i \in \mathrm{N}\ s_i \in S_i} \varepsilon'_k(s_i)$$

Тогда рассмотрим следующую задачу максимизации, соответствующую поиску наилучшего ответа i-го игрока на действия остальных в ε ограниченном равновесии (при достаточно больших k):

$$\begin{cases} u_i(\sigma_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) \to \max\limits_{\sigma_i}, \\ \sigma_i(s_i) \geqslant \varepsilon'_k(s_i), \quad (s_i \in S_i) \\ \sigma_i \in \Delta(S_i). \end{cases}$$

По нашему предположению σ^*_i является наилучшим ответом на любой элемент последовательности σ^k_i, то есть решением такой задачи:

$$\begin{cases} u_i(\sigma_i, \sigma^\varepsilon_{-i}) \to \max\limits_{\sigma_i}, \\ \sigma_i \in \Delta(S_i). \end{cases}$$

Из свойств максимальности линейной функции при линейных ограничениях имеем:

$$u_i(s_i, \sigma^{\varepsilon}_{-i}) = c = const \quad \forall s_i \in S'_i \text{ и } u_i(s_i, \sigma^{\varepsilon}_{-i}) \leqslant c \quad \forall s_i \in S''_i.$$

А тогда по крайней мере одно из решений исходной системы будет иметь вид (при достаточно больших k):

$$\sigma^{\varepsilon_k}(s_i) = \begin{cases} \sigma^*(s_i) - \dfrac{\sum\limits_{s_i \in S''_i} \varepsilon_k(s_i)}{|S'_i|}, & \text{если } s_i \in S'_i, \\ \varepsilon_k(s_i), & \text{если } s_i \in S''_i. \end{cases}$$

Для завершения доказательства остаётся лишь заметить, что $\varepsilon_k = \max\limits_{i \in \mathrm{N}\ s_i \in S_i} \varepsilon_k(s_i) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\sigma^{\varepsilon_k} \to \sigma^*$ при $\varepsilon_k \to 0$. **Q.E.D.**

0.2 Упражнения.

1а. Докажите, что если σ^* — совершенное равновесие в некоторой статической игре G, то σ^* — равновесие Нэша.

1б. Докажите, что если σ^* — вполне смешанное равновесие в некоторой статической игре G, то σ^* — совершенное равновесие.

2. Пусть динамическая игра (возможно с неполной и/или несовершенной информацией, но с полной памятью) Γ сведена к статической игре G. Докажите, что если σ^* — совершенное равновесие в игре G, то σ^* — сильно секвенциальное равновесие в игре Γ.

3. Найдите ошибку в вашем доказательстве предыдущего пункта, т.е. приведите контрпример к утверждению пункта (2). Переформулируйте условие утверждения и докажите по-новой (Подсказка: дело в том, что поведенческие стратегии, которые игрок использует на каждом шаге динамической игры, вообще говоря не обязаны быть независимыми).

4. Приведите пример, когда сильно секвенциальное равновесие не будет совершенным (с учётом задачи 3)?

5. Докажите, что слабо доминируемые стратегии не могут входить в совершенное равновесие с положительной вероятностью.

6. Тем не менее, верно и следующее: пусть игра G' получена из игры G путем последовательного удаления слабо доминируемых стратегий (возможно, за несколько итераций), тогда в игре G могут существовать совершенные равновесия, которых нет в G'. Приведите соответствующий пример.

7. Пусть процесс последовательного удаления слабо доминируемых стратегий доведён до конца: больше удалять нечего. Верно ли, что все оставшиеся равновесия в чистых стратегиях будут совершенными? Доказать или опровергнуть.

8. Пусть s^* — единственное равновесие в чистых стратегиях, которое не может быть вычеркнуто ни при какой последовательности слабо доминируемых стратегий. Верно ли, что s^* — единственное совершенное равновесие в чистых стратегиях?

9. Приведите пример, когда требование в определении (4) того, что σ^*_i является наилучшим ответом (при достаточно больших k) на любую последовательность вполне смешанных профилей $\{\sigma^k\}$, $\{\sigma^k\} \to \sigma^*$, $(k \to \infty)$ приводит к несуществованию истинно совершенного равновесия (это термин, англ. trully perfect equilibrium), притом, что «обычное» совершенное равновесие существует.

10. Найти все совершенные равновесия в игре «семейный спор».

11. Верно ли, что если σ^* — равновесие Нэша в антагонистической игре (седловая точка), то σ^* — совершенное равновесие? Доказать или опровергнуть.