

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Югорский государственный университет

Инженерный факультет

Кафедра «Строительные технологии и конструкции»

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

**Методические указания к расчетно-графической работе
по сопротивлению материалов для студентов всех форм
обучения специальностей 190603, 270102, 280102**

Ханты-Мансийск
2006

УДК 539.3/6
ББК 30.121
Р 24

Рецензент канд. техн. наук, доцент кафедры
«Строительная механика» СибАДИ В.М. Романовский.

Р 24 Расчеты на прочность и жесткость при кручении: Методические указания к расчетно-графической работе по сопротивлению материалов для студентов всех форм обучения специальностей 190603, 270102, 280102 / Сост. Ж.Б. Ищенко. – Ханты-Мансийск: РИЦ ЮГУ, 2006. – 20 с.

Содержатся краткие теоретические сведения и примеры расчетов стержней круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении.

В приведенных примерах излагается методика решения различных типов задач с использованием условий прочности и жесткости и дается их численное решение. Сформулированы вопросы для самоконтроля, указана рекомендуемая для изучения литература. Даны расчетные схемы и исходные данные для всех вариантов индивидуальных заданий.

УДК 539.3/6
ББК 30.121

Составитель Жанна Борисовна Ищенко

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ
ПРИ КРУЧЕНИИ**

**Методические указания и задания к расчетно-графической
работе по сопротивлению материалов для студентов очной и
заочной форм обучения**

Оригинал-макет подготовлен РИЦ ЮГУ

Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman.
Усл. п. л. 1,25. Тираж 60. Заказ № 108.

Редакционно-издательский центр ЮГУ,
628012, Ханты-Мансийский автономный округ-Югра,
г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16

Введение

В деталях машин и механизмов, воспринимающих крутящиеся моменты возникают деформации сдвига. Например, подвергая кручению тонкостенную трубу, показанную на рис. 1, увидим, что прямоугольный до приложения внешней нагрузки элемент материала стенок превратился в параллелограмм за счет того, что первоначально прямой угол уменьшился на малый угол γ , называемый углом сдвига.

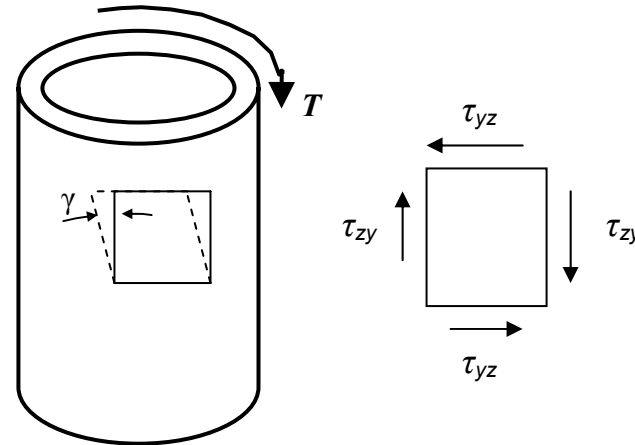


Рис.1. Схема деформации материала при действии крутящих моментов

Из условия равновесия сдвигающих напряжений по граням рассматриваемого элемента при таких деформациях следует, что $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ – это условие называется законом парности касательных напряжений.

1. Напряжения и деформации при кручении стержней

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, нагруженный сосредоточенным моментом T (рис. 1), приложенным в плоскости, перпендикулярной его продольной оси.

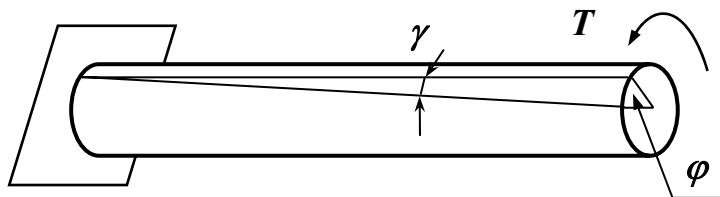


Рис. 1

Деформация стержня, обычно называемого валом, при таком приложении нагрузки происходит следующим образом: каждое поперечное сечение, оставаясь плоским, поворачивается относительно соседнего вокруг оси вала на угол φ , называемый углом закручивания.

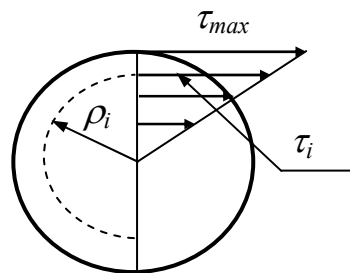


Рис.2

При этом расстояния между сечениями не меняются, а все радиусы рассматриваемого сечения поворачиваются на один и тот же угол, оставаясь прямыми. Следовательно, при кручении валов происходит сдвиг материала, заключенного между соседними сечениями.

В соответствии с законом Гука касательные напряжения, вызываемые сдвигом, зависят от величины угла сдвига γ : $\tau = \gamma \cdot G$, где G – модуль упругости материала при сдвиге. Распределение касательных напряжений в сечении вала пропорционально радиусу ρ_i (см. рис. 2):

$$\tau_i = \frac{T}{I_\rho} \rho_i \quad (1.1)$$

$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции круглого сечения.

Максимальное касательное напряжение при $\rho_i = d / 2$:

$$\tau_{\max} = T / W_p, \quad (1.2)$$

$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления круглого сечения.

Условие прочности при кручении элементов строительных конструкций с круглым поперечным сечением, рассчитываемых по предельным состояниям, записывается следующим образом:

$$|\tau_{\max}| = T / W_p \leq R_s, \quad (1.3)$$

где R_s – расчетное сопротивление материала на срез.

Из этого условия при решении проектной задачи можно определить требуемый полярный момент сопротивления сечения:

$$W_p^{\text{TP}} \geq |T_{\max}| / R_s;$$

подставляя значение полярного момента сопротивления в это выражение, определяется требуемый диаметр вала:

$$d^{\text{TP}} \geq \sqrt[3]{16|T_{\max}| / \pi R_s} \quad (1.4)$$

При расчетах валов круглого сечения машин и механизмов по методу допускаемых напряжений, когда критерием прочности служит допускаемое касательное напряжение материала $[\tau_s]$, условие прочности (1.3) примет вид:

$$|\tau_{\max}| = T / W_p \leq [\tau_s], \quad (1.5)$$

Расчет вала на прочность не исключает возможность возникновения недопустимых деформаций в этом элементе конструкции или машины. В связи с этим необходимо выполнять расчет вала на жесткость. Условие жесткости при кручении:

$$|\theta_{\max}| \leq [\theta], \quad (1.6)$$

где $[\theta]$ – нормативный относительный угол закручивания, определяемый техническими условиями; $[\theta]$ колеблется в пределах от 0.2^0 до 2^0 на метр длины вала, в зависимости от его назначения; θ_{\max} – наибольший относительный угол закручивания проектируемого вала, который рассчитывается по формуле:

$$\theta_{\max} = T / GI_p \quad (1.7)$$

Подставив в условие (1.6) значение θ_{\max} и I_p , получим:

$\frac{32T}{G\pi d^4} \leq [\theta]$, требуемый диаметр сечения вала из этого условия:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{G\pi[\theta]}} \quad (1.8)$$

2. Пример расчета (проектная задача)

Для вала, расчетная схема которого показана на рис. 3, назначить диаметр поперечного сечения из условий прочности и жесткости. Расчет на прочность выполнить по методу допускаемых напряжений.

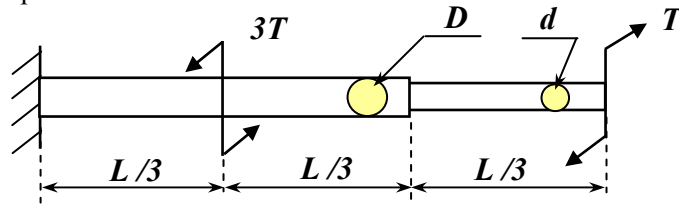


Рис. 3

Исходные данные для проектирования:

$T = 30$ кН·м, $L = 0.9$ м, $D:d = 1.1$. Допускаемое касательное напряжение материала $[\tau_s] = 140$ МПа, модуль упругости при сдвиге $G = 0.8 \cdot 10^5$ МПа, нормативный относительный угол закручивания $[\theta] = 0.3^\circ$ /м.п.

Для решения поставленной задачи потребуется определить сечение, в котором касательные напряжения достигают максимума, и найти тот участок вала, на котором возникает максимальный угол закручивания. Это достигается при построении эпюр крутящих моментов T , касательных напряжений τ и углов закручивания вала φ (см. рис. 4).

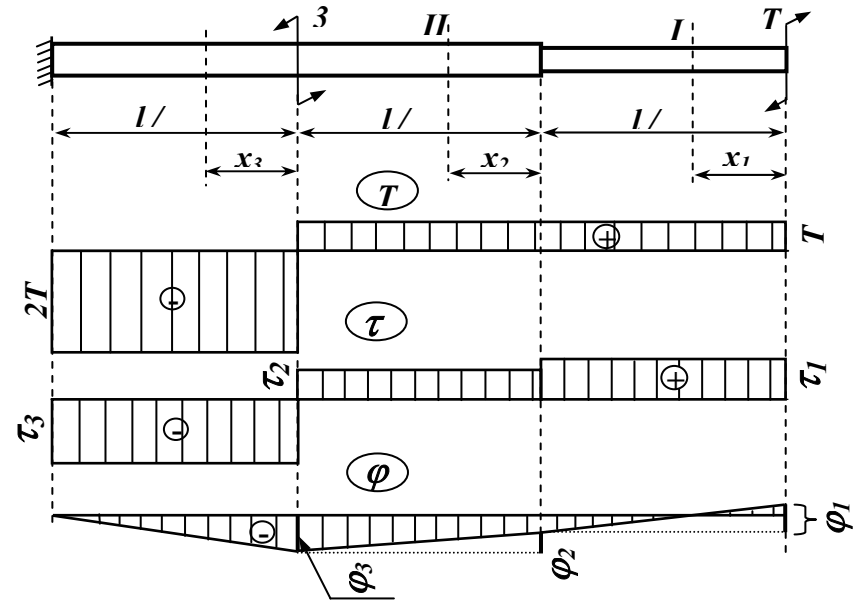
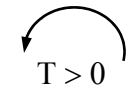


Рис. 4

Для внешнего крутящего момента принято следующее правило знаков:



Для построения эпюры крутящих моментов и касательных напряжений вал разбивается на характерные участки, границами которых служат те сечения, где прикладываются сосредоточенные нагрузки или изменяется диаметр вала.

Сечение I ($0 \leq x_1 \leq l/3$)

$T_1 = T = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; в соответствии с формулой (1.2.) значение максимального касательного напряжения в сечении может быть получено в общем виде:

$$\tau_1 = T_1 / W_{\rho 1} = 16T / \pi d^3 = 16 \cdot 30 \cdot 10^{-3} / 3.141 d^3 = 0,153 / d^3.$$

Сечение II ($0 \leq x_2 \leq l/3$)

$T_2 = T = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; выражая диаметр вала D на этом участке как $D=1,1d$, получим значение напряжения $\tau_2 = T_2 / W_{\rho 2} = 16T / \pi D^3 = 16 \cdot 30 \cdot 10^{-3} / 3.141 (1.1d)^3 = 0,115 / d^3.$

Сечение III ($0 \leq x_3 \leq l/3$)

$T_3 = T - 3T = -2T = -60$ кН·м; по аналогии с предыдущим участком максимальное напряжение в сечении с учетом знака внутреннего усилия:

$$\tau_3 = T_3 / W_{\rho 3} = -32T / \pi D^3 = -32 \cdot 30 \cdot 10^3 / 3.141 (1.1d)^3 = -0,230 / d^3$$

Эпюры крутящих моментов и действующих на участках вала касательных напряжений показаны на рис. 4.

Максимальное (по модулю) касательное напряжение действует в сечениях третьего участка вала, следовательно, условие прочности составляется для этого участка:

$$\tau_3 = |\tau_{\max}| = 0,230 / d^3 \leq [\tau_s] \Rightarrow d \geq (0,230 / [\tau_s])^{0.3};$$

$$d \geq \sqrt[3]{0,230 / 140} = 0,118 \text{ м.}$$

Из условия прочности по касательным напряжениям:

$$d = 118 \text{ мм, } D = 1,1d = 130 \text{ мм.}$$

Для расчета на жесткость необходимо определить значения углов закручивания вала φ на каждом участке.

Абсолютный угол закручивания первого участка вала:

$$\varphi_1 = T_1 L / 3 G I_{\rho 1} = 32T l / 3G \pi d^4 = 10,667 T L / G \pi d^4.$$

Относительный угол закручивания первого участка вала:

$$\theta_1 = T_1 / G I_{\rho 1} = 32T / G \pi d^4.$$

Абсолютный угол закручивания второго участка вала:

$$\varphi_2 = T_2 L / 3 G I_{\rho 2} = 32TL / 3G \pi D^4;$$

подставляя в это выражение $D = 1,1d$, получим:

$$\varphi_2 = 7,285TL / G \pi d^4;$$

Относительный угол закручивания второго участка вала:

$$\theta_2 = T_2 / G I_{\rho 2} = T / G \pi (1,1d)^4 = 21,856 T / G \pi d^4.$$

Абсолютный угол закручивания третьего участка вала:

$$\varphi_3 = T_3 L / 3 G I_{\rho 3} = -64T L / 3G \pi D^4 \text{ [рад];}$$

Подставляя в это выражение $D = 1,1d$, получим:

$$\varphi_3 = -14,57T L / G \pi d^4.$$

Относительный угол закручивания третьего участка вала:

$$\theta_3 = T_3 / G I_{\rho 3} = -2T / G \pi (1,1d)^4 = -43,713 T / G \pi d^4.$$

Построение эпюры углов закручивания следует начинать с третьего участка вала, так как в сечении, примыкающем к жесткой заделке, деформации сдвига равны 0.

Полный угол закручивания вала получаем суммируя углы закручивания на каждом участке: $\varphi_n = \Sigma \varphi_i$.

$$\varphi_n = (-14,570 + 7,285 + 10,667) T L / G \pi d^4 = 3,382 T L / G \pi d^4.$$

Эта эпюра показана рис. 3. Для перевода полученных величин углов закручивания из радианной меры в градусы, следует полученные значения умножить на $180^0 / \pi$.

Максимальный (по модулю) относительный угол закручивания θ_3 . Тогда условие жесткости:

$$\theta_3 = \theta_{\max} = 43,713 T / G \pi d^4 \leq [\theta].$$

Из условия жесткости требуемый диаметр поперечного сечения вала:

$$d \geq \sqrt[4]{43,713 T / G \pi [\theta]}$$

После подстановки численных значений в полученное выражение и перевода величины $[\theta]$ в радианы, получим:

$$d \geq \sqrt[4]{43,713 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 180 / 0,8 \cdot 10^5 \cdot 3,141^2 \cdot 0,3} = 0,177 \text{ м.}$$

По условию жесткости принято $d = 177$ мм, тогда $D = 1,1d = 195$ мм.

Так как размеры поперечного сечения вала, полученные из условия жесткости, больше, чем из условия прочности, окончательно назначено:

$$d = 177 \text{ мм, } D = 195 \text{ мм.}$$

3. Пример расчета (определение несущей способности)

Для заданной расчетной схемы вала (рис. 5) определить величину предельной нагрузки t из условий прочности и жесткости. При расчетах использовать метод предельных состояний.

Исходные данные: $L = 1,3$ м, $d = 60$ мм, $R_S = 150$ МПа, $[\theta] = 0,5^0$, $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Запишем выражение для определения внутреннего усилия в произвольном сечении вала ($0 \leq x \leq L$):

$$T_{(x)} = t(L - x); \quad x = L \Rightarrow T = 0; \quad x = 0 \Rightarrow T = t \cdot L.$$

Касательное напряжение в произвольном сечении вала:

$$\tau_{(x)} = \frac{T_{(x)}}{W_\rho}; \quad \text{тогда максимальное напряжение в опасном сечении:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{t \cdot L}{W_\rho} = \frac{16 \cdot t \cdot L}{\pi \cdot d^3},$$

подставляя это значение в условие прочности, получим:

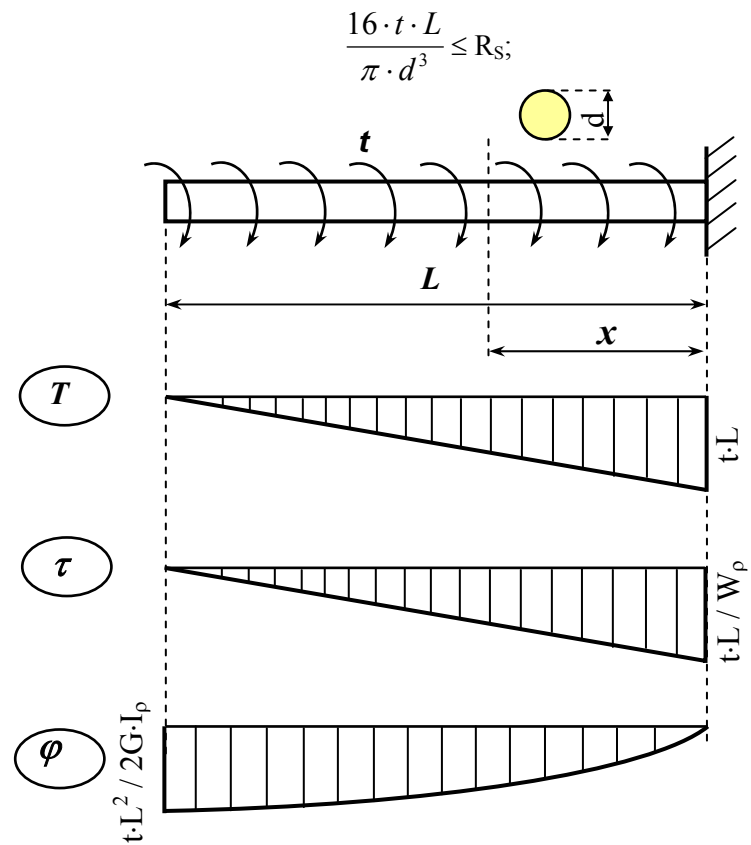


Рис. 5

предельная величина крутящего момента из условия прочности:

$$t_{\text{пред}} \leq \frac{R_s \cdot \pi \cdot d^3}{16 \cdot LI} = \frac{150 \cdot 3 \cdot 141 \cdot 0.06^3}{16 \cdot 1.3} = 0.0049 \text{ МН} \cdot \text{м} / \text{м.п.} = 4.9 \text{ кН} \cdot \text{м} / \text{м.п.}$$

Угол закручивания вала в произвольном сечении определяется уравнением:

$$\varphi_{(x)} = \frac{t(L-x)x}{GI_\rho} + \frac{t \cdot x^2}{2GI_\rho} = \frac{t \cdot x}{GI_\rho} \left(L - \frac{x}{2} \right).$$

В опорном сечении (при $x = 0$) угол закручивания $\varphi_0 = 0$; для сечения на свободном конце вала ($x = L$):

$$\varphi_1 = \varphi_{\max} = \frac{t \cdot L^2}{2GI_\rho}$$

Подставляя выражение φ_{\max} в условие жесткости, получим:

$$\varphi_{\max} = \frac{t \cdot L^2}{2GI_\rho} \leq [\varphi]; \text{ где } [\varphi] = 1 \cdot [\theta] = 1.3 \cdot 0.5 = 0.65^0$$

Предельная величина крутящего момента из условия жесткости:

$$t_{\text{пред}} \leq \frac{2G \cdot I_\rho \cdot [\varphi]}{L^2} = \frac{2G \cdot \pi \cdot d^4 \cdot [\varphi]}{32L^2},$$

подставляя числовые значения величин, входящих в это уравнение, и выразив $[\varphi]$ в радианах, получим предельный крутящий момент:

$$t_{\text{пред}} \leq \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 3,141^2 \cdot 0,06^4 \cdot 0,65}{32 \cdot 1,3^2 \cdot 180} = 0,0014 \text{ МН}\cdot\text{м/м.п.} = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м/м.п.}$$

Выполненные расчеты показали, что для вала с заданными размерами получены следующие значения интенсивности распределенного крутящего момента t :

из условия прочности – $t \leq 4,9 \text{ кН}\cdot\text{м / м.п.}$

из условия жесткости – $t \leq 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м / м.п.}$

Следовательно, предельная величина распределенного крутящего момента назначается равной $1,4 \text{ кН}\cdot\text{м / м.п.}$

Перед решением задач о прочности и жесткости стержня при кручении следует изучить теоретический материал и рассмотреть примеры расчетов, которые приводятся в учебной литературе:

[1], гл. 2, § 2.1, 2.3, гл. .5, § 5.1÷5.3, 5.6;

[2], гл. 8, § 8.1÷8.4;

[3], гл. 3, § 13, 14, 16, гл.9, § 53÷55;

[4], гл. 6, § 6.1, 6.2, 6.4.

4. Вопросы для самоконтроля

1. Какие напряжения возникают при кручении стержней круглого поперечного сечения и как они распределяются по сечению?
2. Какие геометрические характеристики сечения используются при расчетах на прочность и жесткость при кручении?
3. Как сформулировать условие прочности при кручении и как его использовать при назначении размеров поперечного сечения?
4. В чем различие между абсолютным и относительным углом закручивания вала?
5. Как определяются абсолютные углы закручивания вала и как строится их эпюра?
6. Как формулируется и как используется при назначении диаметра вала условие жесткости при кручении?
7. Какие три типа задач могут решаться при расчете валов с использованием условия прочности и жесткости?

5. Расчетно-графическая работа

Расчеты на прочность и жесткость при кручении валов с круглым сечением

Для заданной расчетной схемы ступенчатого бруса с круглым поперечным сечением, нагруженным сосредоточенными крутящими моментами, требуется:

- записать аналитические выражения для определения внутренних усилий на каждом участке рассчитываемого вала, определить их величину и построить эпюру крутящих моментов (эп. T , кН·м);
- записать выражения для определения касательных напряжений на каждом участке, для максимального (по модулю) значения составить условие прочности и определить требуемые диаметры вала из полученного условия прочности. Построить эпюру касательных напряжений (эп. T , кПа или МПа);
- записать выражения для определения угловых деформаций на каждом участке, составить выражения и определить максимальный относительный угол закручивания, из условия жесткости назначить диаметры поперечных сечений вала. Построить эпюру углов закручивания (эп. φ , рад.).

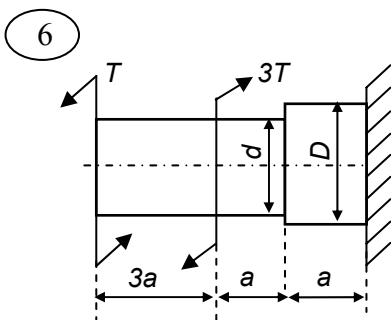
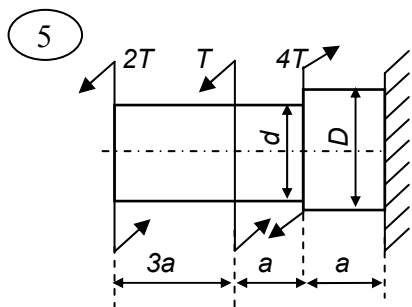
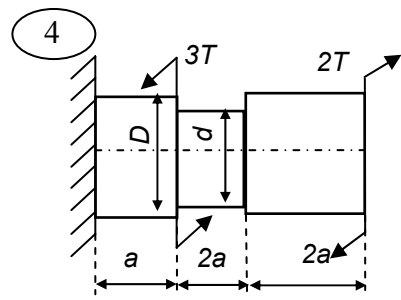
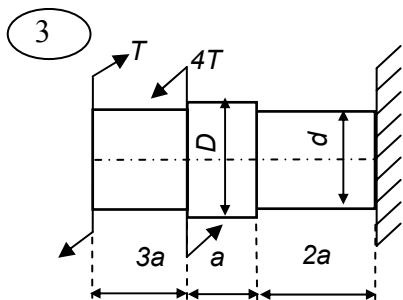
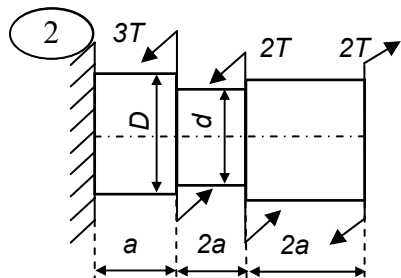
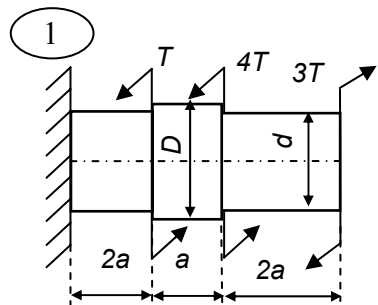
Для всех вариантов задания принять материал конструкции – сталь с модулем упругости $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

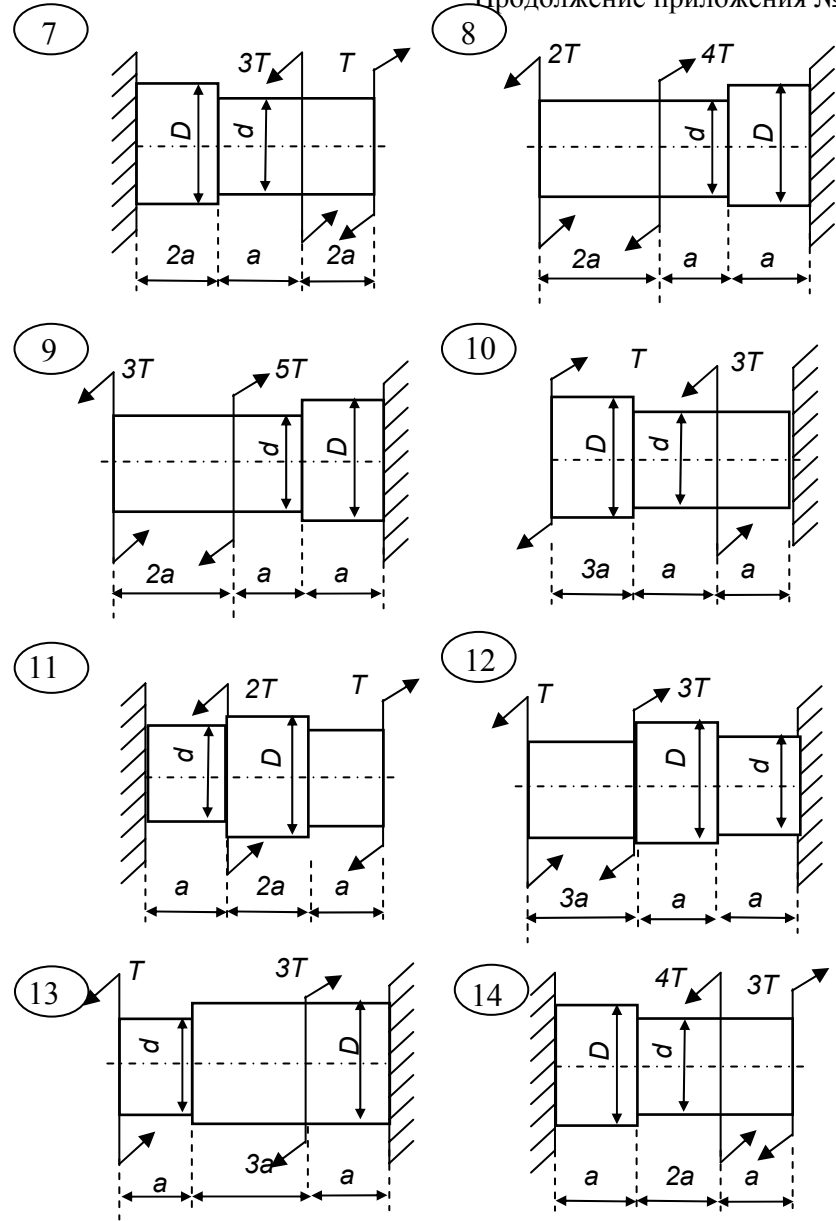
Расчетные схемы, параметры нагрузки и необходимые для выполнения расчетов механические характеристики материала для каждого варианта задания приводятся в приложениях №1 и №2.

6. Литература

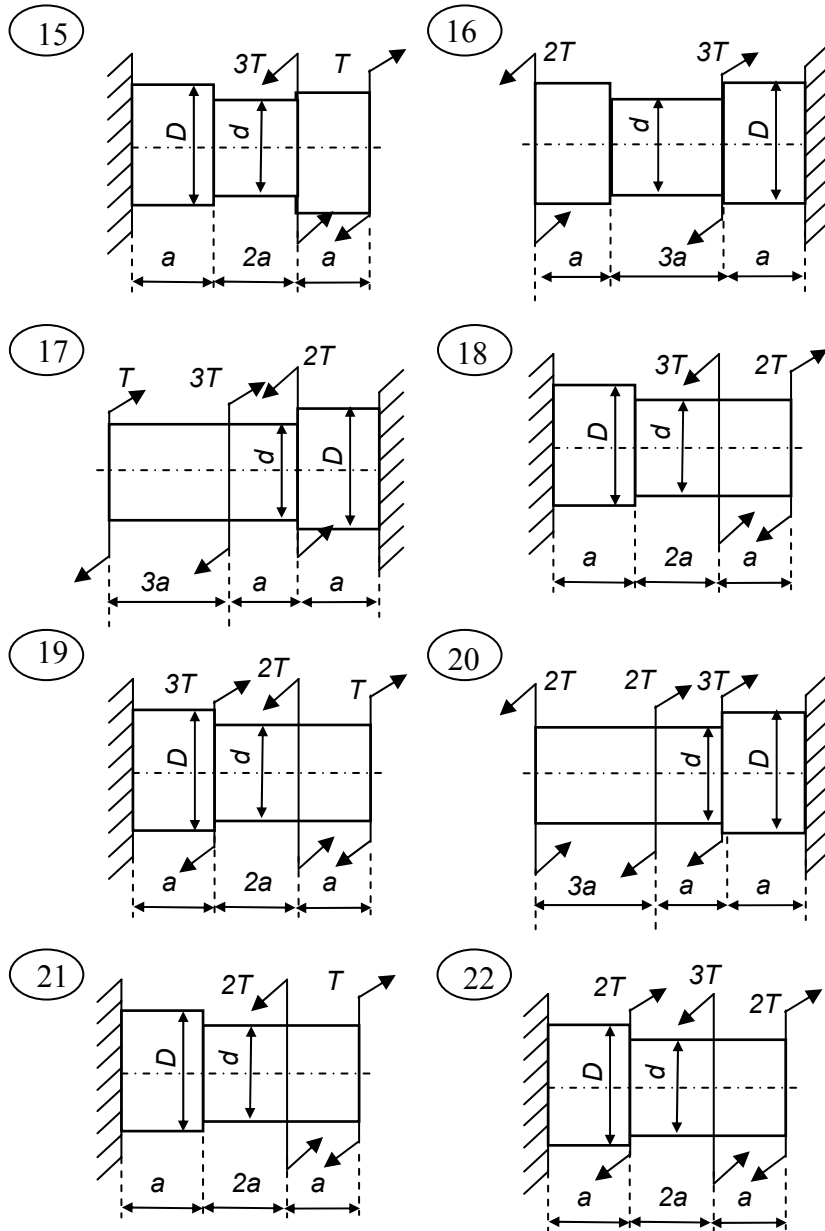
1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учеб. для вузов под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк. 1989, – 624 с.
4. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов под ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Высш. шк., 1986. – 736 с.

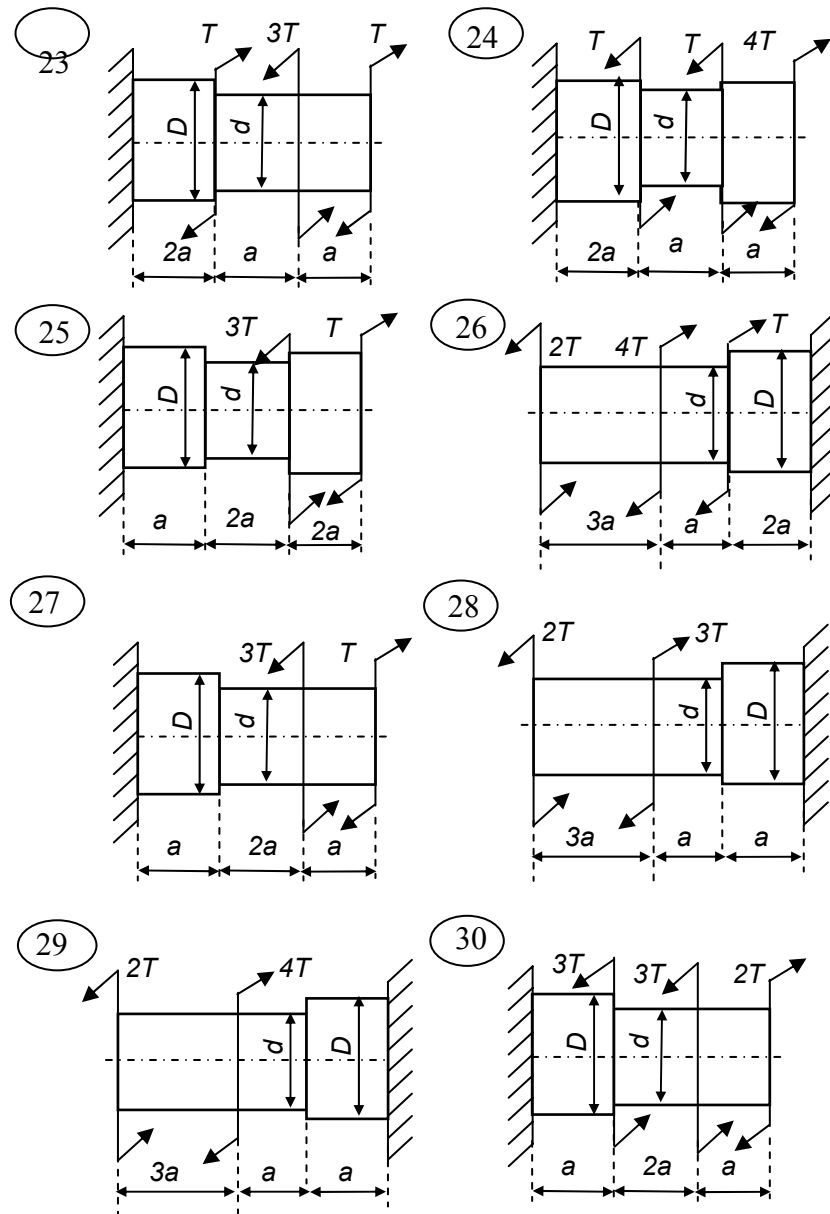
Приложение № 1
 Расчетные схемы ступенчатого бруса с круглым поперечным сечением





Продолжение приложения № 1





Приложение № 2

Варианты исходных данных

№ варианта	a , м	T , кН·м	$D:d$	R_{CP} , МПа	$[\theta]$, °/м
1	0,2	8	1,1	130	0,5
2	0,3	7	1,15	135	0,4
3	0,4	6	1,2	140	0,3
4	0,5	5	1,25	145	0,2
5	0,25	4	1,3	150	0,3
6	0,35	9	1,25	155	0,4
7	0,45	8	1,2	160	0,5
8	0,55	7	1,15	165	0,45
9	0,2	12	1,1	170	0,4
10	0,3	11	1,2	165	0,35
11	0,4	10	1,3	160	0,30
12	0,5	9	1,25	155	0,25
13	0,25	6	1,2	150	0,4
14	0,35	8	1,15	145	0,3
15	0,45	10	1,1	140	0,2

Содержание

Введение.....	3
1. Напряжения и деформации при кручении стержней.....	4
2. Пример расчета (проектная задача).....	6
3. Пример расчета (определение несущей способности)....	9
4. Вопросы для самоконтроля.....	12
5. Расчетно-графическая работа «Расчеты на прочность и жесткость валов с круглым поперечным сечением.....	13
6. Литература.....	13
Приложение № 1.....	14
Приложение № 2.....	18