

**Примеры нулевого вариант контрольной работы по курсу
«Теория функций и функциональный анализ»
для групп 471, 472 отделения ПМИ, НИУ-ВШЭ**

1. Компактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0,1]$:
 - а) $\{n(1 - \cos(\frac{1}{n}t)) : n \in \mathbb{N}\}$;
 - б) $\{\sin \alpha t : \alpha \in [1, 2]\}$.
2. Дано отображение $Ax(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(s+t)x(s) ds + 2$ в $C[0, \pi]$ ($C_1[0, \pi], C_2[0, \pi]$). Найдите:
 - а) при каких λ отображение A является сжимающим; б) приближенно неподвижную точку отображения A при $\lambda = \frac{1}{4}$, сделав три итерации методом последовательных приближений ($x_0(t) \equiv 0$); в) абсолютную и относительную ошибки двух последних приближений.
3. Найдите приближенное решение системы $\begin{cases} 2xy^2 + y^3 = 5, \\ 3x + 2x^2y = 14, \end{cases}$ сделав две последовательные итерации обобщенным методом Ньютона. Найдите абсолютную и относительную ошибки найденных приближенных решений в пространстве \mathbb{R}_1^2 (в \mathbb{R}_∞^2) (точное целочисленное решение нужно «угадать» по приближенному).
4. Докажите, что функционалы $f_n(x) = \int_0^1 x(\frac{1}{n}t) dt$ являются линейными непрерывными в пространстве $C[0,1]$ и найдите их нормы. Будет ли последовательность функционалов $\{f_n\}$ слабо сходиться к $f(x) = x(0)$? Будет ли $\{f_n\}$ сильно ограниченной? (Доп. вопрос: будет ли $\{f_n\}$ сильно сходиться к f ?)
5. Найдите ядро оператор $Ax(t) = 3x(t) + (7t - 3)x'(t) + \int_0^t (4s - 3)x''(s) ds$, $A : C^2[0,1] \rightarrow C^2[0,1]$.
6. Докажите, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найдите их нормы:
 - а) $A : C_1[0,1] \rightarrow C_1[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt{t})$;
 - б) $A : l_2 \rightarrow l_2$, $A(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots)$;
 - в) $A : X \rightarrow X$, $Ap(t) = p'(t) + \int_0^1 p(s) ds$, если $X = (P^1[0,1], \|\cdot\|_2)$, $\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt}$.
7. Докажите, что оператор $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 e^{st} x(s) ds$ имеет ограниченный обратный оператор A^{-1} и найдите его.
8. Решите интегральное уравнение $x(t) - \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s) ds = y(t)$ в классе $C[0, \pi]$.
9. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = \int_0^\pi \cos(t+s)x(s) ds$.
10. В вещественном линейном пространстве $C[0, \pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = x''(t)$, если оператор определен на множестве $D(A) = \{x \in C[0, \pi] : x'' \in C[0, \pi], x(0) = x(\pi) = 0\}$.
11. Какие из следующих операторов $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ являются компактными:
 - а) $Ax(t) = \int_0^t x(s) ds$;
 - б) $Ax(t) = tx(t)$;
 - в) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$.

Примечание: в КР будут 7-8 примеров указанного типа. Допуск к КР – сданное перед контрольной работой ДЗ.