

**Примеры нулевого вариант контрольной работы по курсу  
«Теория функций и функциональный анализ»  
для групп 471, 472 отделения ПМИ, НИУ-ВШЭ**

1. Компактны ли следующие множества функций в пространстве  $C[0,1]$ :
  - а)  $\{n(1 - \cos(\frac{1}{n}t)) : n \in \mathbb{N}\}$ ;
  - б)  $\{\sin \alpha t : \alpha \in [1, 2]\}$ .
2. Дано отображение  $Ax(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(s+t)x(s) ds + 2$  в  $C[0, \pi]$  ( $C_1[0, \pi], C_2[0, \pi]$ ). Найдите:
  - а) при каких  $\lambda$  отображение  $A$  является сжимающим; б) приближенно неподвижную точку отображения  $A$  при  $\lambda = \frac{1}{4}$ , сделав три итерации методом последовательных приближений ( $x_0(t) \equiv 0$ ); в) абсолютную и относительную ошибки двух последних приближений.
3. Найдите приближенное решение системы  $\begin{cases} 2xy^2 + y^3 = 5, \\ 3x + 2x^2y = 14, \end{cases}$  сделав две последовательные итерации обобщенным методом Ньютона. Найдите абсолютную и относительную ошибки найденных приближенных решений в пространстве  $\mathbb{R}_1^2$  (в  $\mathbb{R}_\infty^2$ ) (точное целочисленное решение нужно «угадать» по приближенному).
4. Докажите, что функционалы  $f_n(x) = \int_0^1 x(\frac{1}{n}t) dt$  являются линейными непрерывными в пространстве  $C[0,1]$  и найдите их нормы. Будет ли последовательность функционалов  $\{f_n\}$  слабо сходиться к  $f(x) = x(0)$ ? Будет ли  $\{f_n\}$  сильно ограниченной? (Доп. вопрос: будет ли  $\{f_n\}$  сильно сходиться к  $f$ ?)
5. Найдите ядро оператор  $Ax(t) = 3x(t) + (7t - 3)x'(t) + \int_0^t (4s - 3)x''(s) ds$ ,  $A : C^2[0,1] \rightarrow C^2[0,1]$ .
6. Докажите, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найдите их нормы:
  - а)  $A : C_1[0,1] \rightarrow C_1[0,1]$ ,  $Ax(t) = x(\sqrt{t})$ ;
  - б)  $A : l_2 \rightarrow l_2$ ,  $A(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots)$ ;
  - в)  $A : X \rightarrow X$ ,  $Ap(t) = p'(t) + \int_0^1 p(s) ds$ , если  $X = (P^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt}$ .
7. Докажите, что оператор  $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ,  $(Ax)(t) = x(t) + \lambda \int_0^1 e^{st} x(s) ds$  имеет ограниченный обратный оператор  $A^{-1}$  и найдите его.
8. Решите интегральное уравнение  $x(t) - \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s) ds = y(t)$  в классе  $C[0, \pi]$ .
9. В вещественном линейном пространстве  $C[-\pi, \pi]$  найдите собственные значения и собственные векторы оператора  $Ax(t) = \int_0^\pi \cos(t+s)x(s) ds$ .
10. В вещественном линейном пространстве  $C[0, \pi]$  найдите собственные значения и собственные векторы оператора  $Ax(t) = x''(t)$ , если оператор определен на множестве  $D(A) = \{x \in C[0, \pi] : x'' \in C[0, \pi], x(0) = x(\pi) = 0\}$ .
11. Какие из следующих операторов  $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  являются компактными:
  - а)  $Ax(t) = \int_0^t x(s) ds$ ;
  - б)  $Ax(t) = tx(t)$ ;
  - в)  $Ax(t) = x(0) + tx(1)$ .

Примечание: в КР будут 7-8 примеров указанного типа. Допуск к КР – сданное перед контрольной работой ДЗ.