

Типовой расчет по математическому анализу

4 семестр, поток ИТ, лектор Татаринцев А.В. 2010-11 гг.

Вариант № 401

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (2 - 2i)^5 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^4$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
(a) $z^3 + 27i = 0$ (b) $5e^{-iz} - 2 \cos z = 3$
3. Для функции $f(z) = \left(z + \frac{1}{\bar{z}} \right)^2$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
(a) $f(z) = 1 - 2iz^2 + \bar{z}e^z$ (b) $f(z) = \sin(iz^2)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{2y - x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} 1 \leq |z - i| \leq 2 \\ \operatorname{Re}(1/z) \geq 1/4 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (2 + 2i)z^3 - 3$ отображает область $D : |z| > 3, -\pi/6 < \arg z < \pi/6$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2 - i\pi}{3} \right)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1 + 3i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
(a) $\int_{\Gamma} (\bar{z}^2 - 2z) dz$ $\Gamma : A(0, 0); B(2, 2); C(2, 0)$
(b) $\int_{\Gamma} (2z + 1) \cos(3z) dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
(a) $f(z) = z^2 \cdot \sin \left(\frac{2}{z - 3} \right); z_0 = 3$ (b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} 2z - 2 \cos z}{z^5}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{3z + 1}{z^2(z - 2)}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 2)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
(a) $\int_{\Gamma} \frac{\cos \pi z}{z^3(2z + 1)} dz; \Gamma : |z| = 2$ (b) $\int_{\Gamma} \frac{z - 1}{z^2 + 4} \cdot e^{-3\pi/z} dz; \Gamma : |z + 2i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+1) dx}{(x^2+4)(x^2+2x+17)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2-6x+10)^2} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(x^2+1)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^5 - 5z^2 + 2z + 1 = 0; \quad |z| < 2 \quad (b) \quad 2z^3 - 3z^2 - 7z - 1 = 0; \quad 1 < |z| < 3$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{p^3+1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$.

Вариант № 402

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{3} - i)^6 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2 - 2i} \right)^4$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 + 16 = 0$
 - (b) $4e^{iz} + 3i \sin z = 4$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z})^2 + \frac{1}{z^2}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = (\bar{z})^2 - 2i|z|^4 \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z^2} \right)$
 - (b) $f(z) = \cos(z^2 + i\bar{z})$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{3x + y}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} |z + i| \leq 4 \\ \operatorname{Im}(z^2) \leq 3 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 - i\sqrt{3})z^2 + 2i$ отображает область $D : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{3\pi - i}{4} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 + i}{3} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (z^2 + 2\bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(2, 0); B(0, 2); C(-2, 0)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z - 1) \sin(2z) dz$ $\Gamma : |z| = \pi; \pi/2 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{2}{z - i} \right); z_0 = i$
 - (b) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z \cos z}{z^4}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{2z - 3}{z(z + 2)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 2)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{z^2(z - 2)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 - 4} \cdot e^{-3/z} dz; \Gamma : |z + 2| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x-1) dx}{(x^2+1)(x^2-2x+5)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2+1)^2} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(x^2+6x+13)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^5 + 2z^4 + 13z - 5 = 0; \quad 1 < |z| < 4$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^3}{x^6+1}$.

Вариант № 403

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^4 \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} \right)^6$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^3 - 125i = 0$
 - (b) $2e^{-iz} + 3 \sin z = 2$
3. Для функции $f(z) = \left(z + \frac{2}{z} \right)^2$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = e^{1/z}$
 - (b) $f(z) = \bar{z} \sin 3z$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{3x - y}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество: $\begin{cases} |z| \geq 1 \\ \frac{1}{4} \leq \operatorname{Re} \frac{1}{z} + \operatorname{Im} \frac{1}{z} \leq 1 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i\sqrt{3})z^3 + 2 - i$ отображает область $D : 1 < |z| < 3, \pi/6 < \arg z < \pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2 + 3i\pi}{4} \right)^n$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{3 - i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (\bar{z}^2 + z) dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(3, 2); C(0, 2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (4z - i)e^{3z} dz$ $\Gamma : |z| = 1; 0 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = z^3 \cdot \cos \left(\frac{3}{z-1} \right); z_0 = 1$
 - (b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} 2z - 2z \operatorname{sh} z}{z^4}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{3z - 1}{z^2(z + 2)}$ в ряд Лорана по степеням z .
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{z^3(z - 2)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z + 2}{z^2 + 4} \cdot e^{-\pi/z} dz; \Gamma : |z - 2i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x-1) dx}{(x^2+1)(x^2-4x+5)}$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$(d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x dx}{(x^2-6x+13)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) z^4 - 5z^3 - z^2 - 1 = 0; |z| < 1$$

$$(b) 2z^5 - 3z^4 + 2z^2 - 5 = 0; 1/2 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p(p^2+9)}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$.

Вариант № 404

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (2 + 2i)^3 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \right)^8$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 + 81i = 0$
 - (b) $4e^{-iz} - 3 \cos z = 1$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z})^3 + \frac{2}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = iz^3 + e^{-2\bar{z}}$
 - (b) $f(z) = \operatorname{sh}(z^2)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{4y - x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} z^2 + (\bar{z})^2 \geq 2 \\ \operatorname{Im}(1/z) \leq 1/3 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (-1 + i)z^4 + 2i$ отображает область $D : |z| > 2, \pi/6 < \arg z < \pi/4$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{3 - i\pi}{2} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 - i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (3z^2 + \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(0, 0); B(0, 2); C(-2; 0)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (z - 4) \sin(3z) dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{3}{z - i} \right); z_0 = i$
 - (b) $f(z) = \frac{\cos^2 z - \cos(z^2)}{z^5}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z - 1}{z(z + 3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 3)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} \pi z}{z^2(z + 2i)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 + 9} \cdot e^{-3\pi/z} dz; \Gamma : |z - 3i| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+3) dx}{(x^2+9)(x^2+2x+10)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2-4x+5)^2} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 3x dx}{(x^2+4)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 3z^4 + 2z^3 - z^2 + 3 = 0; \quad |z| < 1/2 \quad (b) \quad z^5 - 2z^2 + 5z + 1 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p^2}{p^3+1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

Типовой расчет по математическому анализу

4 семестр, поток ИТ, лектор Татаринцев А.В. 2010-11 гг.

Вариант № 405

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{3} + i)^3 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2 + 2i} \right)^6$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
(a) $z^3 + 9iz = 0$ (b) $4e^{iz} - 5 \sin z = 4$
3. Для функции $f(z) = z(\bar{z})^2 - \frac{1}{\bar{z}}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
(a) $f(z) = iz \operatorname{Re} z^2 + e^{-2iz}$ (b) $f(z) = \operatorname{ch}(z^2)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{4y - 3x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \left| \frac{z + 2i}{z - 2i} \right| \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i)z^3 + 3 - 2i$ отображает область $D : |z| < 4, \pi/3 < \arg z < \pi/2$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{4 - i\pi}{4} \right)^{2n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3 + 2i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
(a) $\int_{\Gamma} (\bar{z} + 3z)^2 dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(3, -4); C(0, -4)$
(b) $\int_{\Gamma} (4z + 3)e^{-z} dz$ $\Gamma : |z| = 2; 0 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
(a) $f(z) = (z - 1)^2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{2}{z} \right); z_0 = 0$ (b) $f(z) = \frac{\cos 2\pi z - z \operatorname{ch}(z - 1)}{(z - 1)^4}; z_0 = 1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z + 1}{z^3(z - 2)}$ в ряд Лорана по степеням z .
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
(a) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z + 3)} dz; \Gamma : |z| = 4$ (b) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 + 9} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{z} \right) dz; \Gamma : |z - 3i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x-3) dx}{(x^2+1)(x^2-6x+13)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^4+1)^2}$$
$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2-6x+10)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 2z^3 - 7z^2 + 3z + 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{p^4 + 1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$.

Вариант № 406

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = i(3 - 3i)^3 \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^5$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 - 27iz = 0$
 - (b) $5e^{-iz} - 2 \cos z = 3$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z} + 2i \operatorname{Im} z)z^2 + \frac{1}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = iz^2 + \sin 2z$
 - (b) $f(z) = e^{z^2 - \operatorname{Re} z}$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{4y + 3x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \operatorname{Re}(z^2 + 2i\bar{z}) \geq -1 \\ |z - 2| \leq |i - 2z| \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (\sqrt{3} + i)z^4 - 4i$ отображает область $D : |z| < 2, \pi/6 < \arg z < \pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{n!} \left(\frac{1-i}{2} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2+i}{3} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (z - \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(0, 0); B(0, 2); C(-2; -2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z + 2) \sin 3z dz$ $\Gamma : |z| = \pi; -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z + 1)^2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{3}{z} \right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\sin \pi z - \operatorname{sh}(z + 2)^2}{(z + 2)^5}; z_0 = -2$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{2z - 1}{(z - 1)(z + 3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 3)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{z^2(2z + i)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z + 1}{z^2 - 9} \cdot e^{2/z} dz; \Gamma : |z + 3| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4x-1) dx}{(x^2+1)(x^2-4x+8)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{x^6+1}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)(x^2+1)} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(x^2+9)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 2z^5 - 8z^4 + z - 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$.

Типовой расчет по математическому анализу

4 семестр, поток ИТ, лектор Татаринцев А.В. 2010-11 гг.

Вариант № 407

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{3} - i)^7 \left(\frac{1 - i}{2 + 2i} \right)^6$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$
 - (b) $4e^z - 5 \operatorname{sh} z = 4$
3. Для функции $f(z) = (3z + \bar{z})^2 + \frac{z}{\bar{z}}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = iz \operatorname{Im} z^2 + 3e^{iz}$
 - (b) $f(z) = \cos(z^2 + 2z)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{5y - x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек:
$$\begin{cases} \left| \frac{z + 2}{\bar{z} - 2} \right| \leq 1 \\ \operatorname{Im} z + 2 \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases}$$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i)z^4 + 2i$ отображает область $D : |z| < 3, \pi/2 < \arg z < 2\pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \left(\frac{4\pi - i}{2} \right)^{2n+1}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3 - 2i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (\bar{z} - 3iz)^2 dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(3, 4); C(0, 4)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (4z + 3)e^{iz} dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z - 2)^2 \cdot \sin\left(\frac{3}{z}\right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\cos \pi z - z \operatorname{ch}(z + 1)}{(z + 1)^4}; z_0 = -1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z + 1}{z(z - 2)^2}$ в ряд Лорана по степеням z .
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2(z + 2)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + 9} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{z}\right) dz; \Gamma : |z + 3i| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3) dx}{(x^2+4)(x^2-2x+5)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2-2x+5)^2} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{(x^2+1)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^3 - 17z^2 + 25z - 5 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p(p+1)^3}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$.

Вариант № 408

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = i(3 + 3i)^4 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \right)^5$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 + 5iz^2 + 36 = 0$
 - (b) $6e^{-iz} + \cos z = 7$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z} + 2iz)^2 - \frac{3}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = (z + i)^2 + \cos \bar{z}$
 - (b) $f(z) = e^{z^2 - 2z}$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{4y - 3x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right) \leq \frac{4}{5} \\ |z - 2| \leq 5 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (\sqrt{3} - i)z^4 + 3i$ отображает область $D : |z| < 4, \pi/3 < \arg z < \pi/2$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \left(\frac{1+i}{2} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2-3i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (iz - \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(2, 0); B(0, 2); C(2, 2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z + i) \sin 3z dz$ $\Gamma : |z| = \pi; -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z + 2)^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{1}{z} \right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\sin \pi z + z \operatorname{sh} (z + 1)^2}{(z + 1)^3}; z_0 = -1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z + 3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 1)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} \pi z}{z^2(z - i)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z + 2i}{z^2 + 9} \cdot e^{\pi/z} dz; \Gamma : |z + 3i| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 13)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{(x^2 + 1) \, dx}{(x^4 + 1)^2}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + 4)} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x \, dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 3z^6 - 4z^4 - 15z - 1 = 0; \quad |z| < 1 \quad (b) \quad 10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3 = 0; \quad 1/2 < |z| < 1$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p^4 + 1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.

Вариант № 409

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = 4i(\sqrt{3} - i)^{-3} \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^8$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 + 81 = 0$
 - (b) $4e^z + 5 \operatorname{ch} z = -9$
3. Для функции $f(z) = (z - 2\bar{z})^2 + \frac{1}{z + 2\bar{z}}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = i\bar{z} \operatorname{Im} z^2 + e^{-iz}$
 - (b) $f(z) = \sin(z^2 - 2z)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{y - 5x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество: $\begin{cases} |z - 2| \leq 2 \operatorname{Re} z + 1 \\ 0 \leq \arg z + \arg(iz^2) \leq \pi \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (2 + 2i)z^4 - 3i$ отображает область $D : 1 < |z| < 3, \pi/2 < \arg z < 3\pi/4$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{3\pi + 2i}{2} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 - 3i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (i\bar{z} + 3z)^2 dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(-3, 0); C(0; 4)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (4iz + 3)e^{iz} dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z + 2)^2 \cdot e^{-3/z}; \quad z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\cos \pi z + z \operatorname{ch}(z - 1)}{(z - 1)^5}; \quad z_0 = 1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z + 1}{z(z - 2)^3}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 2)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{e^{i\pi z}}{z^2(z - 3)} dz; \quad \Gamma : |z| = 4$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{z^2 + 9} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{z} \right) dz; \quad \Gamma : |z - 3i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4-x) dx}{(x^2+4)(x^2-2x+5)} \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^6+1}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+4)(x^2+1)} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 2z^4 + 4z^3 - 17z^2 - 3 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad 3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$.

Типовой расчет по математическому анализу

4 семестр, поток ИТ, лектор Татаринцев А.В. 2010-11 гг.

Вариант № 410

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = 4i(-1 + i)^3 \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}} \right)^5$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 + 5iz^2 - 4 = 0$
 - (b) $5e^z + \cos iz = 6$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z} + 2z)^3 - \frac{1}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = (3z - i)^2 + \cos(iz)$
 - (b) $f(z) = 1 + e^{z^2 + \bar{z}}$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{4y - 3x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек:
$$\begin{cases} \operatorname{Re} \frac{z+1}{\bar{z}+1} \leq \frac{4}{5} \\ |z-2| + |z+2| \leq 5 \end{cases}$$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i\sqrt{3})z^3 + i - 2$ отображает область $D : 2 < |z| < 4, \pi/3 < \arg z < \pi/2$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \left(\frac{1+i}{3} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2+2i}{3} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (iz + \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(2, 0); B(0, 2); C(-2; 2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z + i) \sin 2z dz$ $\Gamma : |z| = \pi; -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z+2)^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{1}{z^2} \right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\sin \pi z + z \operatorname{sh} (z+2)^2}{(z+2)^4}; z_0 = -2$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{z(z-2i)^2} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{2iz+1}{z^2+4} \cdot e^{-\pi/z} dz; \Gamma : |z+2i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2) dx}{(x^2+1)(x^2-2x+10)} \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^6+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2-2x+5)^2} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax dx}{(x^2+1)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 5z^5 + 4z^4 - 3z^2 + 17 = 0; \quad |z| < 1 \quad (b) \quad z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 2 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{(p^2-1)^2}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$.

Вариант № 411

- Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (2 - 2i)^7 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^5$
- Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - $z^3 - 27i = 0$
 - $5e^{iz} - 2 \cos z = 3$
- Для функции $f(z) = \left(z - \frac{1}{\bar{z}} \right)^2$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
- Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - $f(z) = i - 3z^2 + \bar{z}e^z$
 - $f(z) = \sin(z^2)$
- Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{2y - x}{x^2 + y^2}$.
- Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} 1 \leq |z + i| \leq 2 \\ \operatorname{Re}(1/z) \geq 1/4 \end{cases}$
- В плоскости w найти область, в которую функция $w = (2 - 2i)z^3 - 3$ отображает область $D : |z| > 3, -\pi/6 < \arg z < \pi/6$. Является ли отображение конформным?
- Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2 - i\pi}{3} \right)^n$
 - $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1 + 3i}{4} \right)^n$
- Вычислить интеграл:
 - $\int_{\Gamma} (\bar{z}^2 - 2z) dz$ $\Gamma : A(0, 0); B(2, 2); C(2, 0)$
 - $\int_{\Gamma} (2z + 1) \cos(3z) dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi/2$
- Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - $f(z) = z^2 \cdot \sin \left(\frac{2}{z - 3} \right); z_0 = 3$
 - $f(z) = \frac{\operatorname{ch} 2z - 2 \cos z}{z^5}; z_0 = 0$
- Найти все разложения функции $f(z) = \frac{3z + 1}{z^2(z - 2)}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 2)$.
- Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - $\int_{\Gamma} \frac{\cos \pi z}{z^3(2z + 1)} dz; \Gamma : |z| = 2$
 - $\int_{\Gamma} \frac{z - 1}{z^2 + 4} \cdot e^{-3\pi/z} dz; \Gamma : |z + 2i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 17)} \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)^2 \, dx}{(x^4 + 1)^2}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + 9)} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x \, dx}{(x^2 + 4x + 8)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^6 - 5z^3 + z^2 + 1 = 0; \quad 1/2 < |z| < 1$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p^2}{p^4 + 1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

Вариант № 412

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{3} - i)^5 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2 - 2i} \right)^6$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 + 81 = 0$
 - (b) $4e^{-iz} + 3i \sin z = 4$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z})^2 - \frac{2}{z^2}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = (\bar{z})^2 - 2i|z|^4 \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z^2} \right)$
 - (b) $f(z) = \cos(z^2 - \bar{z})$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{3x + y}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} |z - i| \leq 3 \\ \operatorname{Im}(z^2) \leq 2 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i\sqrt{3})z^2 + 2i$ отображает область $D : 1 < |z| < 3, 0 < \arg z < \pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{3\pi - i}{4} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 + i}{3} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (z^2 + 2\bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(2, 0); B(0, 2); C(-2, 0)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z - 1) \sin(2z) dz$ $\Gamma : |z| = \pi; \pi/2 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{2}{z - i} \right); z_0 = i$
 - (b) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z \cos z}{z^4}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{2z - 3}{z(z + 2)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 2)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{z^2(z - 2)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 - 4} \cdot e^{-3/z} dz; \Gamma : |z + 2| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4-3x) dx}{(x^2+9)(x^2-2x+5)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2+1)^2} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax dx}{(x^2-2x+5)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad 3z^3 + 9z^2 - 5z - 1 = 0; \quad 2 < |z| < 3$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$.

Типовой расчет по математическому анализу

4 семестр, поток ИТ, лектор Татаринцев А.В. 2010-11 гг.

Вариант № 413

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^7 \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} \right)^{-4}$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^3 + 125i = 0$
 - (b) $2e^{iz} + 3 \sin z = 2$
3. Для функции $f(z) = \left(3z + \frac{2}{z}\right)^2$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = e^{-1/z}$
 - (b) $f(z) = \bar{z} \cos 2z$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{3x - 2y}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество: $\begin{cases} |z| \geq 2 \\ \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \frac{1}{z} + \operatorname{Im} \frac{1}{z} \leq 1 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i\sqrt{3})z^3 - 2 + i$ отображает область $D : |z| < 3, \pi/6 < \arg z < \pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2 + 3i\pi}{4} \right)^n$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{3 - i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (\bar{z}^2 + z) dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(3, 2); C(0, 2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (4z - i)e^{3z} dz$ $\Gamma : |z| = 1; 0 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = z^3 \cdot \cos \left(\frac{3}{z-1} \right); z_0 = 1$
 - (b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} 2z - 2z \operatorname{sh} z}{z^4}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{3z - 1}{z^2(z + 2)}$ в ряд Лорана по степеням z .
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{z^3(z - 2)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z + 2}{z^2 + 4} \cdot e^{-\pi/z} dz; \Gamma : |z - 2i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+1) dx}{(x^2+4)(x^2+2x+17)} \\ \text{(b)} & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} \\ \text{(c)} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2-6x+10)^2} \\ \text{(d)} & \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(x^2+1)^2} \end{array}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$\text{(a)} \quad z^5 - 5z^2 + 2z + 1 = 0; |z| < 2 \quad \text{(b)} \quad 2z^3 - 3z^2 - 7z - 1 = 0; 1 < |z| < 3$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{p^3+1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$.

Вариант № 414

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = i(2 + 2i)^5 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \right)^8$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 - 81i = 0$
 - (b) $7e^{-iz} - 3 \cos z = 4$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z})^3 - \frac{2}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = iz^3 - e^{2\bar{z}}$
 - (b) $f(z) = \operatorname{sh}(iz^2)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{4y + x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} z^2 + (\bar{z})^2 \leq 2 \\ \operatorname{Im}(1/z) \leq 1/2 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (-1 - i)z^4 + 2i$ отображает область $D : |z| < 2, \pi/6 < \arg z < \pi/4$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{3 - i\pi}{2} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 - i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (3z^2 + \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(0, 0); B(0, 2); C(-2; 0)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (z - 4) \sin(3z) dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{3}{z - i} \right); z_0 = i$
 - (b) $f(z) = \frac{\cos^2 z - \cos(z^2)}{z^5}; z_0 = 0$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z - 1}{z(z + 3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 3)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} \pi z}{z^2(z + 2i)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 + 9} \cdot e^{-3\pi/z} dz; \Gamma : |z - 3i| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x-1) dx}{(x^2+1)(x^2-2x+5)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2+1)^2} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(x^2+6x+13)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^5 + 2z^4 + 13z - 5 = 0; \quad 1 < |z| < 4$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^3}{x^6+1}$.

Вариант № 415

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (\sqrt{3} + i)^5 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2 + 2i} \right)^6$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^3 + 16iz = 0$
 - (b) $4e^{iz} + 5 \sin z = 4$
3. Для функции $f(z) = z(\bar{z})^2 + \frac{4}{\bar{z}}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = iz^2 \operatorname{Re} z + e^{-2iz}$
 - (b) $f(z) = \operatorname{ch}(iz^2)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{4y - 3x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \left| \frac{z - 2i}{z + 2i} \right| \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1 + i)z^3 - 3 - 2i$ отображает область $D : |z| < 5, \pi/3 < \arg z < \pi/2$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{4 - i\pi}{4} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3 + 2i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (\bar{z} + 3z)^2 dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(3, -4); C(0, -4)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (4z + 3)e^{-z} dz$ $\Gamma : |z| = 2; 0 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z - 1)^2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{2}{z} \right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\cos 2\pi z - z \operatorname{ch}(z - 1)}{(z - 1)^4}; z_0 = 1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z + 1}{z^3(z - 2)}$ в ряд Лорана по степеням z .
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z + 3)} dz; \Gamma : |z| = 4$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 + 9} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{z} \right) dz; \Gamma : |z - 3i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x-1) dx}{(x^2+1)(x^2-4x+5)}$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$(d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x dx}{(x^2-6x+13)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) z^4 - 5z^3 - z^2 - 1 = 0; |z| < 1$$

$$(b) 2z^5 - 3z^4 + 2z^2 - 5 = 0; 1/2 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p(p^2+9)}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$.

Вариант № 416

- Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (3 - 3i)^4 \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^5$
- Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - $z^4 + 27iz = 0$
 - $5e^{iz} - 2 \cos z = 3$
- Для функции $f(z) = (\bar{z} - 2 \operatorname{Re} z)z^2 + \frac{1}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
- Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - $f(z) = iz^2 - \sin 3z$
 - $f(z) = e^{z^2 + \operatorname{Re} z}$
- Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{4y + x}{x^2 + y^2}$.
- Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \operatorname{Re}(z^2 - 2i\bar{z}) \geq -1 \\ |z - 2| \leq |i + 2z| \end{cases}$
- В плоскости w найти область, в которую функция $w = (\sqrt{3} - i)z^4 + 4i$ отображает область $D : |z| < 3, \pi/6 < \arg z < \pi/3$. Является ли отображение конформным?
- Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{n!} \left(\frac{1-i}{2} \right)^{2n}$
 - $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2+i}{3} \right)^n$
- Вычислить интеграл:
 - $\int_{\Gamma} (z - \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(0, 0); B(0, 2); C(-2; -2)$
 - $\int_{\Gamma} (3z + 2) \sin 3z dz$ $\Gamma : |z| = \pi; -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$
- Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - $f(z) = (z + 1)^2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{3}{z} \right); z_0 = 0$
 - $f(z) = \frac{\sin \pi z - \operatorname{sh}(z + 2)^2}{(z + 2)^5}; z_0 = -2$
- Найти все разложения функции $f(z) = \frac{2z - 1}{(z - 1)(z + 3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z + 3)$.
- Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{z^2(2z + i)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - $\int_{\Gamma} \frac{z + 1}{z^2 - 9} \cdot e^{2/z} dz; \Gamma : |z + 3| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+3) dx}{(x^2+9)(x^2+2x+10)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2-4x+5)^2} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 3x dx}{(x^2+4)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 3z^4 + 2z^3 - z^2 + 3 = 0; \quad |z| < 1/2 \quad (b) \quad z^5 - 2z^2 + 5z + 1 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p^2}{p^3+1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

Типовой расчет по математическому анализу

4 семестр, поток ИТ, лектор Татаринцев А.В. 2010-11 гг.

Вариант № 417

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = 2i(\sqrt{3} - i)^5 \left(\frac{1-i}{2+2i}\right)^6$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
(a) $z^4 + 3iz^2 + 4 = 0$ (b) $4e^z - 3 \operatorname{sh} z = 4$
3. Для функции $f(z) = (3z - \bar{z})^2 + \frac{z}{\bar{z}}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
(a) $f(z) = iz \operatorname{Im} z^2 - 2e^{iz}$ (b) $f(z) = \cos(z^2 + z)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{5y - x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \left| \frac{z-2}{\bar{z}+2} \right| \leq 1 \\ \operatorname{Im} z - 3 \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1+i)z^4 - 2i$ отображает область $D: |z| > 3, \pi/2 < \arg z < 2\pi/3$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{4\pi-i}{2}\right)^{2n+1}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3-2i}{4}\right)^n$
9. Вычислить интеграл:
(a) $\int_{\Gamma} (\bar{z} - 3iz)^2 dz$ $\Gamma: A(3, 0); B(3, 4); C(0, 4)$
(b) $\int_{\Gamma} (4z + 3)e^{iz} dz$ $\Gamma: |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
(a) $f(z) = (z-2)^2 \cdot \sin\left(\frac{3}{z}\right); z_0 = 0$ (b) $f(z) = \frac{\cos \pi z - z \operatorname{ch}(z+1)}{(z+1)^4}; z_0 = -1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z+1}{z(z-2)^2}$ в ряд Лорана по степеням z .
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
(a) $\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2(z+2)} dz; \Gamma: |z| = 3$ (b) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2+9} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{z}\right) dz; \Gamma: |z+3i| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x-3) dx}{(x^2+1)(x^2-6x+13)} \\ \text{(b)} & \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^4+1)^2} \\ \text{(c)} & \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \\ \text{(d)} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2-6x+10)^2} \end{array}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$\text{(a)} \quad 2z^3 - 7z^2 + 3z + 1 = 0; |z| > 1 \quad \text{(b)} \quad z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0; 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{p}{p^4+1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}$.

Вариант № 418

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = (3 - 3i)^3 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \right)^5$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 - 5iz^2 + 36 = 0$
 - (b) $6e^{iz} + \cos z = 7$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z} + 2iz)^2 - \frac{3}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = (z - 2i)^2 + \cos \bar{z}$
 - (b) $f(z) = e^{z^2+z}$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Im} f(z) = \frac{y + 3x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right) \leq \frac{5}{4} \\ |z - 2| \leq 4 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (\sqrt{3} + i)z^4 - 3i$ отображает область $D : |z| < 4, \pi/3 < \arg z < \pi/2$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \left(\frac{1+i}{2} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2-3i}{4} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (iz - \bar{z}^2) dz$ $\Gamma : A(2, 0); B(0, 2); C(2, 2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z + i) \sin 3z dz$ $\Gamma : |z| = \pi; -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z + 2)^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{1}{z} \right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\sin \pi z + z \operatorname{sh} (z + 1)^2}{(z + 1)^3}; z_0 = -1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z + 3)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 1)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} \pi z}{z^2(z - i)} dz; \Gamma : |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z + 2i}{z^2 + 9} \cdot e^{\pi/z} dz; \Gamma : |z + 3i| = 2$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4x-1) dx}{(x^2+1)(x^2-4x+8)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{x^6+1}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)(x^2+1)} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x dx}{(x^2+9)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 2z^5 - 8z^4 + z - 1 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$.

Вариант № 419

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = 3i(\sqrt{3} - i)^3 \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^5 + 32 = 0$
 - (b) $4e^z + 5 \operatorname{ch} z = 9$
3. Для функции $f(z) = (z + 3\bar{z})^2 + \frac{1}{z - 2\bar{z}}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $v(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = i\bar{z} \operatorname{Im}(iz^2) + e^{-iz}$
 - (b) $f(z) = \sin(z^2 - z)$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{y + 5x}{x^2 + y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество: $\begin{cases} |z - 2| \leq 2 \operatorname{Re} z - 1 \\ 0 \leq \arg z + \arg(iz^2) \leq \pi/2 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (2 + 2i)z^4 + 2i$ отображает область $D : 1 < |z| < 3, \pi/2 < \arg z < 3\pi/4$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{3\pi + 2i}{2}\right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2-3i}{4}\right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (i\bar{z} + 3z)^2 dz$ $\Gamma : A(3, 0); B(-3, 0); C(0; 4)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (4iz + 3)e^{iz} dz$ $\Gamma : |z| = \pi; 0 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z + 2)^2 \cdot e^{-3/z}; \quad z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\cos \pi z + z \operatorname{ch}(z - 1)}{(z - 1)^5}; \quad z_0 = 1$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{4z + 1}{z(z - 2)^3}$ в ряд Лорана по степеням $(z - 2)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{e^{i\pi z}}{z^2(z - 3)} dz; \quad \Gamma : |z| = 4$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{z^2 + 9} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{z}\right) dz; \quad \Gamma : |z - 3i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3) dx}{(x^2+4)(x^2-2x+5)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2-2x+5)^2} \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{(x^2+1)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3 = 0; \quad |z| > 1 \quad (b) \quad z^3 - 17z^2 + 25z - 5 = 0; \quad 1 < |z| < 2$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p(p+1)^3}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$.

Вариант № 420

1. Найти $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ комплексного числа: $z = 3i(1+i)^4 \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}} \right)^5$
2. Решить уравнения, множество решений изобразить на комплексной плоскости:
 - (a) $z^4 - 5iz^2 - 4 = 0$
 - (b) $5e^z + 2 \cos z = 7$
3. Для функции $f(z) = (\bar{z} - 3z)^3 + \frac{1}{z}$ найти $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и проверить является ли $u(x, y)$ гармонической функцией.
4. Проверить условие Коши-Римана и вычислить, где возможно, производные:
 - (a) $f(z) = (z+i)^2 - \cos(2iz)$
 - (b) $f(z) = 1 + e^{z^2 - \bar{z}}$
5. Найти $f(z)$, если функция дифференцируема и $\operatorname{Re} f(z) = \frac{4y+3x}{x^2+y^2}$.
6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек: $\begin{cases} \operatorname{Re} \frac{z+1}{\bar{z}+1} \leq \frac{5}{4} \\ |z-2| + |z+2| \leq 6 \end{cases}$
7. В плоскости w найти область, в которую функция $w = (1-i\sqrt{3})z^3 + i - 2$ отображает область $D: 1 < |z| < 4, \pi/3 < \arg z < \pi/2$. Является ли отображение конформным?
8. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
 - (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \left(\frac{1+i}{3} \right)^{2n}$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2+2i}{3} \right)^n$
9. Вычислить интеграл:
 - (a) $\int_{\Gamma} (iz + \bar{z}^2) dz$ $\Gamma: A(2, 0); B(0, 2); C(-2; 2)$
 - (b) $\int_{\Gamma} (3z+i) \sin 2z dz$ $\Gamma: |z| = \pi; -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$
10. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$. Выделить главную и правильную часть ряда Лорана. Определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции в точке z_0 :
 - (a) $f(z) = (z+2)^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{1}{z^2} \right); z_0 = 0$
 - (b) $f(z) = \frac{\sin \pi z + z \operatorname{sh} (z+2)^2}{(z+2)^4}; z_0 = -2$
11. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)^2}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$.
12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:
 - (a) $\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{z(z-2i)^2} dz; \Gamma: |z| = 3$
 - (b) $\int_{\Gamma} \frac{2iz+1}{z^2+4} \cdot e^{-\pi/z} dz; \Gamma: |z+2i| = 1$

13. Вычислить интеграл, используя вычеты:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 13)} \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{(x^2 + 1) \, dx}{(x^4 + 1)^2}$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + 4)} \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x \, dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$$

14. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области:

$$(a) \quad 3z^6 - 4z^4 - 15z - 1 = 0; \quad |z| < 1 \quad (b) \quad 10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3 = 0; \quad 1/2 < |z| < 1$$

15. С помощью вычетов найти оригинал изображения Лапласа $F(p) = \frac{1}{p^4 + 1}$.

16. С помощью вычетов найти Фурье-образ функции $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.