КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1. Общие методические указания

Студент выполняет вариант, совпадающий с двумя последними цифрами его учебного шифра. Например, согласно шифру 5311/12, студент выполняет вариант № 12. Если последние цифры шифра превосходят число 20, следует вычесть число, кратное 20. Например, 5311/26, соответствует вариант № 6, полученный при вычитании $26 - 20 = 6$ или шифру 5311/53 соответствует № 13 $= 53 - 2 \times 20$.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной (ученической) тетради, на внешней обложке указать фамилию, имя, отчество, полный шифр, номер контрольной работы.
2. Работа выполняется чернилами (не красными) с полями для замечаний рецензента.
3. Решения задач должны быть подробными, без сокращения слов. Перед решением каждой задачи должно присутствовать ее условие.

Задачи располагать в порядке номеров, указанных в задании, не меняя этих номеров.

2 Методические указания к выполнению контрольной работы № 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, в которой в специальном порядке записаны $m \cdot n$ элементов a_{ij}:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij})_{m \times x}.$$

Первый индекс i является номером строки, а второй индекс j – номером столбца, на пересечении которых в матрице стоит элемент a_{ij}.

Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число строк – ее порядком. Остальные матрицы называют *прямоугольными.*

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ считаются *равными* $(A = B)$ тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы $a_{ij} = b_{ij}$, $(i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$.

Диагональ квадратной матрицы, содержащая элементы $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, называется *главной*, а диагональ, которая содержит элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$, называется – *побочной.*

Суммой $A + B$ $(m \times n)$ *– матриц* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $(m \times n)$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n).$$

Произведением αA *матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* α (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, которая получается из матрицы A умножением всех элементов на α:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n).$$

Произведением AB $(m \times n)$ *– матрицы* $A = (a_{ij})$ *на* $(n \times k)$ *– матрицу* $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$ – матрица $C = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i – ой строки матрицы A и j – го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}, \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,k).$$

Заметим, что число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B.

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется, т.е.

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*

$$O=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

Сумма нулевой матрицы O и произвольной матрицы A дает матрицу A:

$$A+O=A.$$

Единичной матрицей называется матрица вида

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

Пример. Вычислить 1) $A+B$; 2) $2A$; 3) $A\cdot B$, где $A=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}$.

Решение.

1. $A+B=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+3&-2+4\\5+2&-2+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2\\7&3\end{bmatrix}$,

2. $2A=2\begin{bmatrix}3&-2\\5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot3&2\cdot(-2)\\2\cdot5&2\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-4\\10&-4\end{bmatrix}$,

3. $A\cdot B=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot3+(-2)\cdot2&3\cdot4+(-2)\cdot5\\5\cdot3+(-2)\cdot2&5\cdot4+(-2)\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\11&10\end{bmatrix}$

.

Введем понятие определителя (или детерминанта) матрицы. *Определителем матрицы*

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

порядка $n>1$ называется число $\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}$, где M_{1k} – определитель порядка $(n-1)$, полученный из матрицы A вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Число M_{1k} называется дополнительным минором элемента a_{1k}.

Применим данное определение к матрицам 2-го и 3-го порядков. Для матрицы $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ имеем

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

где $M_{11}=a_{22}$, $M_{12}=a_{21}$. Аналогично для матрицы $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ получим

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+$$
$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что понятие определителя имеет смысл только для квадратных матриц.

В дальнейшем умение вычислять определители понадобится нам для решения систем линейных уравнений методом Крамера.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

а матрица

$$A^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

называется *расширенной матрицей системы*.

Если $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$, то система (1) называется *однородной*.

Числа $c_1,c_2,\cdots,c_n$ называются *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Введем понятие ранга матрицы.

В матрице A размером $(m \times n)$ минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю или миноров порядка $r+1$ вообще нет.

Рангом матрицы называется порядок базисного минора (обозначение $\operatorname{rang} A$).

Проще всего находить ранг матрицы и ее базисный минор при помощи *элементарных преобразований*, к которым относятся:

1. замена строк столбцами, а столбцов - соответствующими строками;
2. перестановка строк матрицы;
3. вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
4. умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
5. прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки;

Важное значение имеет **теорема:** элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Матрицы, полученные в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными* (пишут: $A \sim B$).

Если при помощи нескольких последовательно выполненных элементарных преобразований перейти от матрицы A к некоторой другой матрице A_1, то $rang\ A = rang\ A_1$. Вычислив ранг A_1 мы тем самым будем знать и ранг A. Оказывается, что от любой матрицы A можно перейти к такой матрице A_1, вычисление ранга которой не представляет затруднений; для этого следует добиться, чтобы в A_1 было достаточно много нулей

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Матрицы, имеющие вид (4) называются *треугольными*.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.

Решение.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\\0&-9&-18\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

Разберем преобразования матрицы A:

1. ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-4), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-7), к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-10);
2. разделим все элементы второй строки на (-3), третьей на (-7), четвертой строки на (-9);
3. к третьей и четвертой строкам прибавим вторую, умноженную на (-1);
4. вычеркнем третью и четвертую строки, состоящие только из нулей.

В результате данных преобразований остались две различные строки.

В качестве базисного минора возьмем определитель $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Его порядок равен двум, а определителей третьего порядка составить уже нельзя, следовательно, $rang\ A=2$.

Вопрос о совместности системы (1) полностью решается следующей *теоремой:*

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности т.е.

$$rang\ A=rang\ A^*=r$$

тогда:

1. *если $r=n$, то система имеет единственное решение;*
2. *если $r<n$, то система имеет бесконечно много решений, а именно, некоторым $n-r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определятся уже единственным образом.*

Рассмотрим далее некоторые методы решения систем линейных уравнений.

1. **ПРАВИЛО КРАМЕРА.**

Если в системе (1) $m=n$ и $\det A\neq 0$, то система (1) имеет единственное решение и

$$x_i=\Delta_i/\det A, \tag{5}$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя матрицы A заменой i – го столбца на столбец свободных членов. Формулы (5) носят названия формул Крамера.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера (задача 1.1–1.20)

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1-x_2+x_3=6,\\ x_1+5x_2=-3.\end{cases}$$

Решение.

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&-1&1\\1&5&0\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5\\6\\-3\end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&-1&1\\1&5&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}3\begin{vmatrix}-1&1\\5&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}1\begin{vmatrix}2&-1\\1&5\end{vmatrix}=$$

$$=3(0-5)-2(0-1)+(10+1)=-15+2+11=-2.$$

Так как $\Delta=-2\neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение. Вычислим Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&2&1\\6&-1&1\\-3&5&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}5\begin{vmatrix}-1&1\\5&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}6&1\\-3&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}1\begin{vmatrix}6&-1\\-3&5\end{vmatrix}=$$

$$=5(0-5)-2(0+3)+(30-3)=-25-6+27=-4,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&5&1\\2&6&1\\1&-3&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}3\begin{vmatrix}6&1\\-3&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}5\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}1\begin{vmatrix}2&6\\1&-3\end{vmatrix}=$$

$$=3(0+3)-5(0-1)+(-6-6)=9+5-12=2,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&5\\2&-1&6\\1&5&-3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}3\begin{vmatrix}-1&6\\5&-3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}2&6\\1&-3\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}5\begin{vmatrix}2&-1\\1&5\end{vmatrix}=$$

$$=3(3-30)-2(-6-6)+5(10+1)=-81+24+55=-2.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Таким образом, получили $x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1.$

Проверка: $\begin{cases} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 1 = 5, \\ 2 \cdot 2 + 1 + 1 = 6, \\ 2 - 5 = -3. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1.$

2. МЕТОД ГАУССА.

Пусть задана система (1). Для того, чтобы решить систему (1) методом Гаусса, надо данную систему привести к треугольному виду, а затем обратным ходом последовательно вычислить неизвестные.

На практике рациональнее преобразовывать не саму систему, а ее расширенную матрицу. Расширенную матрицу системы приводим с помощью элементарных преобразований к виду, когда все элементы, стоящие ниже главной диагонали равны нулю.

Метод Гаусса является одним из универсальных методов нахождения решения системы линейных уравнений. Его универсальность заключается в том, что он позволяет установить не только совместность или несовместности системы, но и найти решение совместной системы.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу A^* и приведем ее к треугольному виду (4):

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Разберем преобразование матрицы A^*:

1. ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2), к третьей строке прибавим первую;
2. сократим третью строку на 2;
3. к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-1);

4. сократим третью строку на (-3).

Мы видим, что $\text{rang}A = \text{rang}A^* = 3$, т.к. базисный минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Число неизвестных $n = 3$. Следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Найдем его методом Гаусса, для этого запишем систему, соответствующую преобразованной матрице A^* (укороченная система): $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Откуда получим: $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. Проверка: $\begin{cases} 2 - 1 - 2 = -1, \\ 4 - 1 - 1 = 2, \\ -2 + 3 + 2 = 3. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1) проверяем условие $\text{rang}\, A = \text{rang}\, A^* = r$ (если $\text{rang}\, A \neq \text{rang}\, A^*$, то систем не имеет решения);
выбираем базисный минор порядка r и записываем укороченную систему;

2) неизвестные $x_1, x_2, \cdots, x_r$ назовем *базисными,* а $x_{r+1}, \cdots, x_n$ *свободными* и выразим базисные неизвестные через свободные;

3) записываем общее решение системы.

Пример. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и одно частное решение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. ее расширенная матрица A^* получается добавлением к основной матрице A нулевого столбца и, следовательно, всегда $\text{rang}A = \text{rang}A^*$.

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ всегда является решением однородной системы (тривиальное решение).

Для существования нетривиального (ненулевого) решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang}\, A = r < n$.

Найдем ранг матрицы A.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&-1&-6&5\\0&-3&-18&15\\0&2&12&-10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&1&6&-5\\0&1&6&-5\\0&1&6&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&4&-3\\0&1&6&-5\end{array}\right]$$

Разберем преобразования матрицы A:

1. ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-3), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4), к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-3);

2. разделим элементы второй строки на (-1), элементы третьей строки на (-3), а элементы четвертой строки на 2;

3. из третьей и четвертой строк вычтем вторую строку.

Выберем в качестве базисного минора

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\cdot1-0\cdot2=1\neq0.$$

Следовательно, $\operatorname{rang}A=2$ и система имеет ненулевые решения.
Запишем укороченную систему

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\ \qquad\; x_2+6x_3-5x_4=0\end{cases}.$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 (т.к. в базисный минор выбраны 1-й и 2-й столбцы), тогда x_3 и x_4 – свободные неизвестные. Полагая $x_3=c_3$, $x_4=c_4$, находим x_1 и x_2.

$$\begin{cases}x_1+2x_2=-4c_3+3c_4\\ \qquad\; x_2=-6c_3+5c_4\end{cases}.$$

Подставим x_2 в первое уравнение системы и найдем x_1:

$$x_1+2(-6c_3+5c_4)=-4c_3+3c_4,$$
$$x_1=12c_3-10c_4-4c_3+3c_4=8c_3-7c_4.$$

Запишем общее решение системы

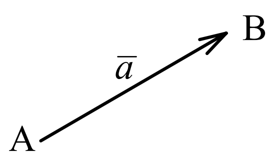
$$X(c_3, c_4) = \begin{pmatrix} 8c_3 - 7c_4 \\ -6c_3 + 5c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим любое частное решение. Например, полагая $c_3 = 1$, $c_4 = 0$, получим $x_1 = 8$, $x_2 = -6$. Таким образом, частное решение системы имеет вид: $x_1 = 8$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Геометрическим вектором называется направленный отрезок. Обозначается вектор двумя большими латинскими буквами с общей чертой $\overline{AB}$ (A – начало вектора, B – конец вектора) или одной малой $\overline{a}$ (см. рис.)



Векторы называются *равными,* если они имеют одинаковые длины, лежат на параллельных прямых или на одной прямой и направлены в одну сторону. Число, равное длине вектора, называется его *модулем.*

Если заданы декартовы координаты вектора $\overline{a} = \{x, y, z\}$, то модуль вектора $\overline{a}$, обозначаемый символом $|\overline{a}|$, вычисляется по формуле: $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Если заданы две точки в декартовой системе координат $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, где A – начало вектора, B – конец вектора, то координаты вектора $\overline{a}$ вычисляются по формулам $\overline{a} = \overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Операции алгебраического сложения векторов и умножение вектора на число называются *линейными операциями* над векторами.

1. Если $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то координаты вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ вычисляются по формулам $\overline{c} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$.

2. Если $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и α – действительное число, то координаты вектора $\overline{d} = \alpha\overline{a}$ вычисляются по формулам $\overline{d} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}$.

Пример. Даны два вектора $\overline{a} = \{1,1,1\}$ и $\overline{b} = \{1,0,-1\}$. Вычислить а) $|\overline{b}|$; б) $2\overline{a} + \overline{b}$.

Решение.

а) $\left|\bar{b}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;

б) $2\bar{a} + \bar{b} = 2\{1,1,1\} + \{1,0,-1\} = \{2,2,2\} + \{1,0,-1\} = \{2+1, 2+0, 2+(-1)\} =$
$= \{3,2,1\}$.

Скалярное произведение векторов, его свойства

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается $(\bar{a},\bar{b})$ или $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Обозначим через φ угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда скалярное произведение выражается формулой

$$(\bar{a},\bar{b}) = \cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы декартовыми координатами $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулю ($(\bar{a},\bar{b}) = 0$) тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны. В частности $(\bar{a},\bar{b}) = 0$, если $\bar{a} = 0$ или $\bar{b} = 0$.

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$;
2. $\lambda(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\lambda\bar{b}) = (\lambda\bar{a},\bar{b})$, где λ – константа;
3. $(\bar{a},\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b}) + (\bar{a},\bar{c})$.

С помощью скалярного произведения можно вычислить:

1. Модуль вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$. Эта формула справедлива для любой системы координат. В частности, в декартовой системе координат данная формула примет вид $|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, где $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$.

2. Косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

1. Проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$

$$\text{Пр}_{\bar b}\,\bar a = \frac{(\bar a, \bar b)}{|\bar b|}.$$

Пример. Векторы $\bar a$ и $\bar b$ взаимно перпендикулярны и $|\bar a| = 3$, $|\bar b| = 5$. Найти $|\bar a + \bar b|$.

Решение.

$$|\bar a + \bar b| = \sqrt{(\bar a + \bar b, \bar a + \bar b)} = \sqrt{(\bar a, \bar a) + (\bar a, \bar b) + (\bar b, \bar a) + (\bar b, \bar b)} =$$
$$= \sqrt{|\bar a|^2 + 2|\bar a||\bar b|\cos 90^0 + |\bar b|^2} = \sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot 0 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$
.

Пример. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\bar a = \{2, -4, 4\}$ и $\bar b = \{-3, 2, 6\}$.

Решение.

Воспользуемся формулой $\cos\varphi = \dfrac{(\bar a, \bar b)}{|\bar a|\cdot|\bar b|}$.

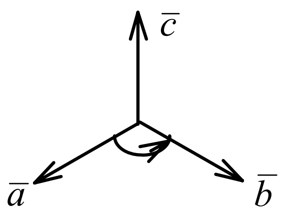
$$(\bar a, \bar b) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2\cdot(-3) - 4\cdot 2 + 4\cdot 6 = 10;$$
$$|\bar a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6;$$
$$|\bar b| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7;$$
$$\cos\varphi = \frac{10}{6\cdot 7} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}.$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\bar a$ на вектор $\bar b$ называется вектор $\bar c$, обозначаемый символом $[\bar a, \bar b]$ (или $\bar a \times \bar b$) и определяемый тремя правилами:

1. $|\bar c| = |\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar a$ и $\bar b$;

2. вектор $\bar c$ перпендикулярен к каждому из векторов $\bar a$ и $\bar b$;



3. вектор $\bar c$ ориентирован так, что если смотреть с его конца на плоскость векторов $\bar a$ и $\bar b$, то кратчайший поворот от $\bar a$ к $\bar b$ происходит против часовой стрелки (см. рис.)

Алгебраические свойства векторного произведения:

1. $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=-\left[\bar{b},\bar{a}\right]$;
2. $\lambda\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left[\lambda\bar{a},\bar{b}\right]=\left[\bar{a},\lambda\bar{b}\right]$, где λ – вещественное число;
3. $\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right]=\left[\bar{a},\bar{c}\right]+\left[\bar{b},\bar{c}\right]$.

Геометрические свойства векторного произведения:

1. модуль векторного произведения $\left\|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right\|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

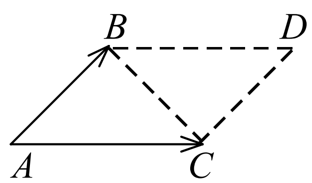
2. если $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$, то $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=0$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельные векторы.

3. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы декартовыми координатами $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то векторное произведение $\bar{a}$ на $\bar{b}$ вычисляется по формуле

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

Пример. Даны точки $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$. Вычислить площадь треугольника $\Delta\ ABC$.

Решение.



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right\|,$$

$$\overline{AB}=\{3-1,0-2,-3-0\}=\{2,-2,-3\}$$

$$\overline{AC}=\{5-1,2-2,6-0\}=\{4,0,6\}$$

Вычислим $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]$:

$$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}-2&-3\\0&6\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2&-3\\4&6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&-2\\4&0\end{vmatrix}\right\}=\{-12,-24,8\}$$

$$\left\|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right\|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28.$$

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$ (кв. ед.).

Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ на вектор $\bar{c}$. Принято обозначение смешанного произведения трех векторов $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ (или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$).

Геометрические свойства смешанного произведения:

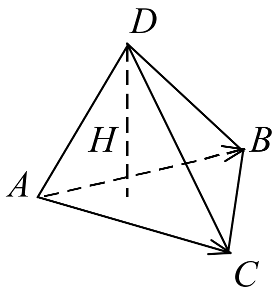
1. модуль смешанного произведения $\left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)\right|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;
2. векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = 0$.

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы декартовыми координатами: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Даны вершины тетраэдра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину высоты, опущенную из вершины D.

Решение.



$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| \cdot h = \frac{1}{6} \left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| \cdot h;$$

$$V\text{тетр} = \frac{1}{6} \left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|.$$

Тогда $\frac{1}{6} \left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right| = \frac{1}{6} \left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| \cdot h.$

Откуда получим $h = \dfrac{\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|}{\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right|}$.

Вычислим $\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = 28$ (см. предыдущий пример).

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix}0 & 6\\ -7 & 7\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot(-2)\begin{vmatrix}4 & 6\\ -7 & 7\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 3\begin{vmatrix}4 & 0\\ -7 & -7\end{vmatrix}=2(0+42)+2(28+42)-3(-28)=308.$$

Тогда $h=\dfrac{308}{28}=11.$

Кривые второго порядка

В декартовой системе координат общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (6)$$

где не все коэффициенты A, B и C одновременно равны нулю. Если $A=B=C=0$, то уравнение $Dx+Ey+F=0$ определяет прямую линию.

В декартовой системе координат уравнение (6) примет один из следующих видов:

1. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0,y_0)$ и радиусом R;

2. $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C(x_0,y_0)$ и полуосями a и b;

3. а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0,y_0)$, действительной полуосью a и мнимой полуосью b;

б) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0,y_0)$, действительной полуосью b и мнимой полуосью a;

4. а) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ – каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(x_0,y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси OX.

б) $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ – каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(x_0,y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси OY.

Используя каноническое уравнение кривой, легко построить график данной линии в декартовой системе координат.

Пример. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x,y)=0$ к каноническому виду. Определить вид кривой и построить ее график.

а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0,$

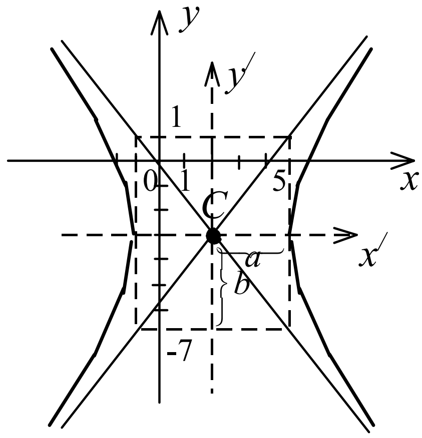
$$16x^2-64x-9y^2-54y-161=0,$$

$$16\left(x^2-4x\right)-9\left(y^2+6y\right)-161=0,$$

$$16\left(x^2-2x\cdot 2+4\right)-64-9\left(y^2+2y\cdot 3+9\right)+81-161=0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144.$$

Разделим обе части уравнения на 144: $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$. Данное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $C(2,-3)$, действительной полуосью $a=3$ и мнимой полуосью $b=4$. Сделаем схематический чертеж.

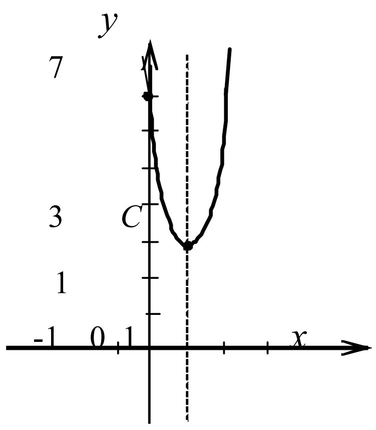


б) $y=4x^2-8x+7,$

$y=4\left(x^2-2x\right)+7,\ \ y=4\left(x^2-2x\cdot 1+1\right)-4+7,$

$y=4(x-1)^2+3,$

$y-3=4(x-1)^2,\quad (x-1)^2=\dfrac{1}{4}(y-3)$ – парабола с вершиной в точке $C(1,3)$ и осью симметрии, параллельной оси OY.

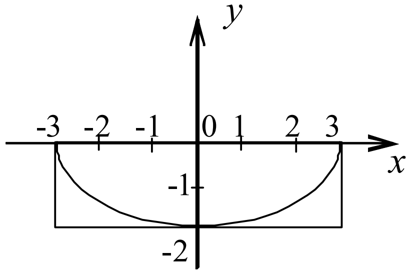


в) $y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Преобразуем это уравнение, возведя обе части в квадрат

$$y^2=\frac{4}{9}\left(9-x^2\right),\quad \frac{y^2}{4}=\frac{9-x^2}{9},\quad \frac{y^2}{4}=1-\frac{x^2}{9},\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с центром в точке $O(0,0)$ и полуосями $a=3$, $b=2$. Если решить данное уравнение относительно y, получим



$$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,,\quad y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,.$$

В условии задачи дано второе из этих уравнений. Оно определяет не весь эллипс, а только ту его часть, для точек которой $y\le 0$, т.е. половину эллипса, расположенную ниже оси OX.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0, \tag{7}$$

где A, B и C - постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2\ne 0$, определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Если в общем уравнении прямой $B\ne 0$, то разрешив его относительно y, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \tag{8}$$

где $k=-\dfrac{A}{B}$ – тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси OX; $b=-\dfrac{C}{B}$ – ордината точки пересечения прямой с осью OY.

Уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{9}$$

является уравнением прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеет угловой коэффициент k.

Если в общем уравнении прямой $C\ne 0$, то, разделив все члены на $-C$, получим уравнение прямой «в отрезках»

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{10}$$

где $a=-\dfrac{C}{A}$, $b=-\dfrac{C}{B}$ - величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на осях координат OX и OY, соответственно.

Уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{11}$$

является уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Обозначим $x_2-x_1=a_1$, $y_2-y_1=a_2$ координаты направляющего вектора прямой $\bar{a}=\{a_1,a_2\}$, тогда (10) примет вид

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}, \tag{12}$$

где $M_0(x_0,y_0)$ – точка на прямой. Уравнение (12) называется *каноническим уравнением прямой*. Введя параметр t, из (11) получим *параметрические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \end{cases}, \text{ где } 0\le t<\infty \tag{13}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{A,B\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{14}$$

Вектор $\overline{N}$ - называется *нормальным вектором прямой*. Раскрывая в (14) скобки, получим общее уравнение прямой

$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0.$$

Таким образом, в общем уравнении прямой, коэффициенты при x и y суть координаты нормального вектора прямой.

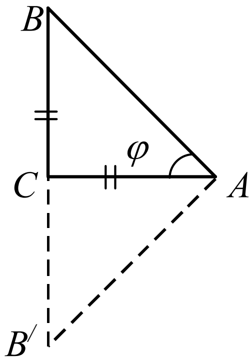
Пусть две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Возможны следующие случаи их взаимного расположения:

1) прямые параллельны (в частности совпадают) тогда и только тогда, когда выполняется условие $k_1=k_2$;

2) прямые пересекаются в некоторой точке, тогда угол между ними находится по формуле $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$;

3) прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1\cdot k_2=-1$.

Пример. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны декартовы координаты вершины острого угла $A(2,1)$ и уравнение противолежащего катета BC: $x-2y+1=0$. Составить уравнения двух других сторон этого треугольника.



Решение. Найдем уравнение прилежащего катета. Так как $AC \perp BC$, CB: $x-2y+1=0$, то уравнение CA имеет вид $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}$ $\Rightarrow$ $2x+y-5=0$. $(k_1=-2)$ Угол между катетом и гипотенузой в равнобедренном треугольнике φ равен 45^0. Для нахождения уравнения гипотенузы воспользуемся формулой $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$, из которой найдем угловой коэффициент прямой AB.

1. $\mathrm{tg}45^0=\dfrac{k_2+2}{1-2\cdot k_2} \Rightarrow 1=\dfrac{k_2+2}{1-2k_2} \Rightarrow k_2=-\dfrac{1}{3}$.

Тогда уравнение AB имеет вид

$y-y_A=k_2(x-x_A) \;\Rightarrow\; (y-1)=-\dfrac{1}{3}(x-2) \;\Rightarrow\; x+3y-5=0.$

2. $\mathrm{tg}45^0=\dfrac{-2-k_1}{1-2\cdot k_1} \Rightarrow 1=\dfrac{-2-k_1}{1-2k_1} \Rightarrow k_1=3$.

Тогда уравнение $AB^/$: $(y-3)=3(x-2) \;\Rightarrow\; 3x-y-5=0.$

Ответ: AC: $2x+y-5=0$, AB: $x+3y-5=0$, $AB^/$: $3x-y-5=0$.

Прямая и плоскость в пространстве

Плоскость в декартовой системе координат может быть задана следующими уравнениями:

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Кроме того,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{A,B,C\}$.

2. Уравнение плоскости «в отрезках»

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где a, b, c - величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях OX, OY и OZ, соответственно.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Прямая в пространстве задается:

1) общими уравнениями L в пространстве в $\Re^3$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_{21}x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$, таким образом, прямая задана как линия пересечения двух плоскостей.

2) каноническими уравнениями L в $\Re^3$

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, а $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ – направляющий вектор.

3) параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t, \\ y = y_0 + a_2t, \\ z = z_0 + a_3t. \end{cases}$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-1,0)$ и прямую $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей координаты вектора нормали $\bar{N} = \{A, B, C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Найдем координаты вектора нормали. $M(2,-1,0)$ – данная точка, $M_0(2,1,-3)$ – точка, лежащая на нашей прямой, $\bar{S} = \{-1,2,1\}$ – координаты направляющего вектора прямой. Тогда

$$\bar{N} = \left[\bar{S}, \overline{MM_0}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \{-8,-3,-2\}.$$

Запишем уравнение искомой плоскости

$$-8(x-2) - 3(y+1) - 2z = 0,$$

$$8x-16+3y+3+2z=0,$$

$$8x+3y+2z-13=0.$$

3. Варианты заданий для контрольной работы № 1

Элементы линейной алгебры

1. Доказать совместность системы линейных уравнений и решить ее двумя методами: 1) Крамера; 2) Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1-7x_2+x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=1, \\ 4x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=4, \\ 2x_1-3x_2-4x_3=-3, \\ x_1+8x_2-3x_3=-13. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-3x_2-x_3=10, \\ x_1-x_2+x_3=6. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1-4x_2-x_3=-5, \\ 2x_1+x_2-3x_3=9, \\ 3x_1+2x_2+x_3=9. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-7x_2+2x_3=-11, \\ 2x_1+4x_2+5x_3=3. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ 3x_1-x_2-x_3=2, \\ 5x_1-3x_2+x_3=6. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=7, \\ 2x_1-2x_2+x_3=2, \\ x_1-5x_2+4x_3=-10. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=4, \\ 4x_1-3x_2+x_3=-2, \\ 3x_1+x_2-x_3=-3. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=1, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-9, \\ 5x_1+2x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=3, \\ 4x_1+2x_2-5x_3=-10, \\ 2x_1-x_2+x_3=6. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=7, \\ -x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=5, \\ x_1+x_2-2x_3=-4, \\ 3x_1-x_2+5x_3=14. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=8, \\ 2x_1-6x_2+x_3=13, \\ x_1-x_2+x_3=6. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_2+x_3=5, \\ x_1-3x_2+x_3=-5. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-3, \\ x_1+x_2+x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-5. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ -x_1+x_2+2x_3=4, \\ 3x_1-x_2+x_3=6. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=14, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3, \\ 2x_1-2x_2+3x_3=-3, \\ x_1-x_2+3x_3=-3. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2+x_3=-5, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=0. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2-2x_3=0, \\ x_1-3x_2+5x_3=17. \end{cases}$

2. Найти общее и одно частное решение однородной системы линейных уравнений.

$$2.1.\begin{cases}3x_1+x_2-4x_3+2x_4+x_5=0,\\2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0,\\x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0.\end{cases}$$

$$2.2.\ \begin{cases}7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0,\\x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\2x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$$

$$2.3.\begin{cases}x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0,\\5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0,\\3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0.\end{cases}$$

$$2.4.\ \begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0,\\x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0,\\4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0.\end{cases}$$

$$2.5.\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0,\\2x_1+x_2+3x_3+x_4-5x_5=0,\\x_1+3x_2-x_3+6x_4-x_5=0.\end{cases}$$

$$2.6.\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3-3x_4-x_5=0,\\x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0,\\x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0.\end{cases}$$

$$2.7.\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0,\\x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0,\\2x_1+3x_2+x_3=0.\end{cases}$$

$$2.8.\begin{cases}x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0,\\2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0,\\3x_1+x_2+2x_4=0.\end{cases}$$

$$2.9.\begin{cases}7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0,\\x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0,\\5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0.\end{cases}$$

$$2.10.\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0,\\2x_1-2x_2-6x_3-4x_4+x_5=0,\\3x_1-2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0.\end{cases}$$

$$2.11.\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0,\\x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0.\end{cases}$$

2.12. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

1) Найти модуль вектора $3\overline{BC} - 2\overline{DA}$;

2) Найти площадь грани ABC;

3) Найти длину высоты, опущенной из вершины D;

4) Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$;

5) Записать уравнение плоскости ABC;

6) Записать уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

3.1. $A(-1,2,3)$, $B(1,0,6)$, $C(-2,5,-1)$, $D(4,2,4)$.
3.2. $A(-1,4,3)$, $B(0,2,0)$, $C(0,-1,-1)$, $D(-4,3,5)$.
3.3. $A(-2,1,1)$, $B(3,-3,-2)$, $C(-3,-6,-3)$, $D(-5,2,0)$.
3.4. $A(3,-3,2)$, $B(5,-9,1)$, $C(4,-6,-2)$, $D(2,-2,4)$.
3.5. $A(3,1,-4)$, $B(2,-1,-7)$, $C(4,-2,-2)$, $D(2,2,-2)$.
3.6. $A(4,1,2)$, $B(5,3,5)$, $C(8,4,0)$, $D(5,0,7)$.
3.7. $A(0,1,-2)$, $B(6,3,1)$, $C(4,4,-4)$, $D(1,0,3)$.
3.8. $A(3,2,-2)$, $B(6,4,1)$, $C(7,9,-4)$, $D(5,1,3)$.
3.9. $A(1,2,-2)$, $B(-2,4,1)$, $C(5,3,-4)$, $D(3,1,3)$.
3.10. $A(1,2,2), B(-2,4,6), C(5,3,0), D(3,1,7)$.
3.11. $A(1,-3,-1), B(-2,-1,4), C(5,0,-3), D(0,-2,1)$.
3.12. $A(-3,1,-2), B(4,-1,3), C(-2,4,-4), D(-4,3,-2)$.
3.13. $A(3,1,-2), B(5,-1,3), C(4,4,-4), D(2,3,2)$.
3.14. $A(-1,1,2), B(1,-1,-3), C(0,4,-4), D(-2,3,2)$.
3.15. $A(-1,4,-2), B(2,2,-5), C(0,9,-4), D(-2,6,2)$.
3.16. $A(1,1,-2), B(4,-1,-5), C(2,1,-4), D(0,3,2)$.
3.17. $A(-1,1,-2), B(2,-1,6), C(0,2,-4), D(-2,3,2)$.
3.18. $A(-1,2,-2), B(2,0,6), C(3,3,-4), D(-2,4,2)$.
3.19. $A(-1,2,3), B(2,0,8), C(3,3,1), D(-2,4,7)$.
3.20. $A(-1,2,0), B(2,0,5), C(3,3,-2), D(-2,4,3)$.

4. В соответствии с вариантом выполнить задание.

4.1. Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин: $A(1,2), B(2,3), C(1,3)$.

4.2. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $x+2y-5=0$, $2x+y-4=0$ и точка пересечения его диагоналей $(1,1)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

4.3. Даны вершины треугольника $A(1,-2), B(-1,1)$ и точка пересечения его высот $(8,-1)$. Составить уравнения сторон треугольника.

4.4. Даны вершины треугольника: $A(1,2), B(-2,0), C(-1,1)$. Найти длины его высот.

4.5. Составить уравнения сторон квадрата, если известны одна из вершин $(2,1)$ и точка пересечения диагоналей $(-1,0)$.

4.6. Даны уравнения сторон прямоугольника $x-3y+2=0$, $3x+y-1=0$ и одна из его вершин $(-1,2)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

4.7. Даны уравнения сторон параллелограмма $x+y-1=0$, $2x-3y+2=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x-y+1=0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.

4.8. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух других его сторон $2x-y+1=0$, $2x-y-2=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+y-1=0$.

4.9. Составить уравнения сторон треугольника, если заданы две его вершины $A(1,2), B(-2,3)$ и точка пересечения медиан $(0,-1)$

4.10. Даны вершины треугольника: $A(1,-1), B(2,3), C(-1,2)$. Составить уравнения его высот.

4.11. Даны две смежные вершины квадрата $A(1,-3), B(2,1)$. Составить уравнения его сторон.

4.12. Составить уравнения сторон и высот треугольника с вершинами в точках: $A(2,-1), B(0,2), C(-1,3)$.

4.13. Даны две стороны прямоугольника $x+3y-1=0$, $x+3y+2=0$ и уравнение его диагонали $2x-y+1=0$. Составить уравнения двух других сторон.

4.14. Составить уравнения сторон и высот треугольника с вершинами в точках: $A(2,1), B(-1,2), C(3,2)$.

4.15. Три последовательные вершины параллелограмма имеют координаты: $A(2,1), B(-1,3), C(1,-2)$. Составить уравнения диагоналей этого параллелограмма.

4.16. Составить уравнения сторон и найти внутренние углы треугольника с вершинами в точках: $A(2,-1), B(1,2), C(-3,1)$.

4.17. Дан треугольник с вершинами в точках: $A(2,-1), B(3,1), C(-2,2)$. Составить уравнения его высот и медиан.

4.18. Даны вершины треугольника $A(-2,3), B(1,2)$ и точка пересечения его медиан $M(2,4)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

4.19. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения его двух сторон $x+3y-1=0$, $x+3y+2=0$ и одна из его диагоналей $2x-y-1=0$.

4.20. Найти точку пересечения высот треугольника с вершинами в точках: $A(2,3), B(-1,2), C(1,-3)$.

5. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x,y)=0$ к каноническому виду. Определить вид кривой и построить ее график.

5.1. $4x^2-8x+y^2-4y+4=0.$ 5.2. $9x^2+18x+4y^2-8y-23=0.$

5.3. $4x^2-4x-4y+9=0.$ 5.4. $4x^2-3y^2-8x+6y-11=0.$

5.5. $x^2+y^2-10x+2y+1=0.$ 5.6. $x^2-6x+2y+7=0.$

5.7. $2x^2+8x-y^2+4y+6=0.$ 5.8. $x^2+x+y^2-y-1/2=0.$

5.9. $4x^2-8x+y^2+4y-8=0.$ 5.10. $x^2-4x+y^2-2y+1=0.$

5.11. $2x^2-6x-4y-1=0.$ 5.12. $x^2-2x-y^2+2y-12=0.$

5.13. $x^2+2x+y^2-2y-34=0.$ 5.14. $16x^2+64x+9y^2-18y-71=0.$

5.15. $2x^2+20x-5y+55=0.$ 5.16. $4x^2-24x-3y^2-6y+45=0.$

5.17. $x^2-x+y^2-y+1/4=0.$ 5.18. $4x^2-8x+y^2+4y-8=0.$

5.19. $x^2+6x-2y+11=0.$ 5.20. $-x^2+4x+2y^2-4y-6=0.$

4. Методические указания к выполнению контрольной работы №2

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предел функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Число y_0 называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta>0$, что для всех x, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|y_0-f(x)|<\varepsilon$.

Если y_0 есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 то пишут
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ или $f(x)\to y_0$ при $x\to x_0$.

Число y_1 называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *слева* (пишут $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=y_1$), если $f(x)$ стремится к пределу y_1 при x, стремящемся к числу x_0 так, что принимает только значения, меньшие x_0. Если x принимает только значения, большие x_0, то пишут

$\lim\limits_{x\to x+0} f(x)=y_2$ и называют y_2 *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *справа*.

При вычислении пределов функций используются следующие теоремы:

Если каждая из функций $y=f(x)$ и $g=\varphi(x)$ имеет конечный предел при $x\to x_0$, то сумма, разность и произведение этих функций также имеет конечный предел, причем

$$\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\pm\varphi(x)\right|=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\cdot\varphi(x)\right|=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x),$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0,$, то и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет конечный предел, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$.

Следствие:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{x\to x_0}\left(Cf(x)\right)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, где $C=\mathrm{const}$.
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b$ и m − натуральное число, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^m=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^m.$$

Кроме того, при вычислении пределов нужно обратить внимание на то, что элементарные функции непрерывны там, где они определены, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-3x+1}{4x-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-3x+1}{4x-2}=\frac{2\lim\limits_{x\to x_0}x^3+\lim\limits_{x\to x_0}x^2-3\lim\limits_{x\to x_0}x+1}{4\lim\limits_{x\to x_0}x-2}=\frac{2\cdot 1^3+1^3-3\cdot 1+1}{4\cdot 1-2}=\frac{1}{2}$$

Однако, бывают случаи, когда теоремы о пределах суммы, частного и произведения неприменимы, т.к. при вычислении пределов получаются *неопределенности* $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0\cdot\infty), \left(1^{\infty}\right), \left(0^{0}\right), (\infty-\infty), \left(\infty^{0}\right)$.

Для вычисления таких пределов функцию $f(x)$ заменяют функцией $f_1(x)$, принимающей в окрестности точки x_0 те же значения, что и $f(x)$ и определенной в точке x_0. Пределы таких функций равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) = f(x_0).$$

Рассмотрим простейшие приемы раскрытия неопределенностей и нахождения пределов функций.

Неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Рассмотрим предел дробно-рациональной функции, когда при $x \to x_0$ и числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$.

Решение.

Непосредственный переход к пределу по формуле (1), дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, т.е. функция в точке $x_0=2$ неопределена. Для решения задачи поступим следующим образом, разделим числитель и знаменатель дроби на $(x-2)$, получим

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}, \quad x\neq 2.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x^3-8)}{(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{2^2+4+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3.$

Сформулируем ***правило.***

Для того, чтобы найти предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to x_0$ и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $(x-x_0)$ и перейти к пределу $x\to x_0$ в полученном выражении. Если и после этого неопределенность сохраняется, то надо произвести повторное деление на $(x-x_0)$.

Пусть $f(x)$ − дробь, содержащая иррациональные выражения.

Пример. Найти. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(2+\sqrt{x+4}\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{4-(x+4)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{-x}=\lim_{x\to 0}\left(-\left(2+\sqrt{x+4}\right)\right)=-4.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^3}+1\right)}{x^3\left(\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^3}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^3-1\right)}{x^3\left(\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^3}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3\left(\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^3}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

Правило. Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, в случае, когда пределы числителя и знаменателя дроби равны нулю, надо освободиться от имеющихся иррациональностей, после этого сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение одинаковых множителей и т. п.) и перейти к пределу при $x\to x_0$ в полученном выражении.

Замечание. В этом случае используются формулы сокращенного умножения

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right),$$
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).$$

Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Рассмотрим предел при $x \to \infty$ отношения двух многочленов

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

В данном случае теорема о пределе дроби неприменима, т.к. пределы числителя и знаменателя не существуют.

Преобразуем дробь следующим образом:

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \frac{x^n\left(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \ldots + a_n/x^n\right)}{x^m\left(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \ldots + b_m/x^m\right)} =$$

$$= \frac{x^{n-m}\left(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \ldots + a_n/x^n\right)}{\left(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \ldots + b_m/x^m\right)};$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \ldots + a_n/x^n\right)}{\left(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \ldots + b_m/x^m\right)} = \dfrac{a_0}{b_0}$;

и $$\lim_{x\to\infty} x^{n-m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-m}\left(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \ldots + a_n/x^n\right)}{\left(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \ldots + b_m/x^m\right)} = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ a_0/b_0, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Правило. Чтобы вычислить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные бесконечности, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наибольшей степени, встречающейся в членах дроби, а затем перейти к пределу.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 7}{3x^4 + 2x^2 + 10}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{15x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 7}{3x^4 + 2x^2 + 10} = \lim_{x\to\infty}\frac{15 - 8/x + 4/x^2 + 1/x^3 - 7/x^4}{3 + 2/x^2 + 10/x^4} = \frac{15}{3} = 5.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x^2+100x+1}{0.1x^5+0.3x^3+0.01}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1000x^2+100x+1}{0.1x^5+0.3x^3+0.01}=\lim_{x\to\infty}\frac{1000/x^3+100/x^4+1/x^5}{0.1+0.3/x^2+0.01/x^5}=\frac{0}{0.1}=0.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-12}{x+5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-12}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-12/x^2}{1/x+5/x^2}=\frac{2}{0}=\infty.$$

Пусть $f(x)$ − дробь, содержащая иррациональности. При $x\to\infty$ имеем неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, которую раскрывают по правилу, указанному в предыдущем пункте, т.е. делят числитель и знаменатель дроби на x в высшей степени, а затем переходят к пределу при $x\to\infty$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x+3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2/x^2+5/x^2}}{x/x+3/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+5/x^2}}{1+3/x}=\frac{1}{1}=1.$$

Первый замечательный предел

Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ от функций, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции используют первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}$$

и следствия из него

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1.}$$

Примеры.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} x/2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x/2}{\operatorname{arctg} x/2}\cdot\frac{3x}{x/2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{\operatorname{arctg} x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x/2}=1\cdot 1\cdot 6=6;$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Замечание. В этом примере использована формула тригонометрии

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{2x+\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\operatorname{tg} x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\operatorname{tg} x}{x}}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}\cdot$$

Второй замечательный предел

Для раскрытия неопределенностей вида $\left(1^\infty\right)$ используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \text{или} \quad \lim_{t\to\infty}(1+t)^{1/t}=e}$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3/x}{1-2/x}\right)=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)=\infty$.

Таким образом, имеем неопределенность $\left(1^\infty\right)$. Воспользуемся вторым замечательным пределом, для этого преобразуем сначала выражение, стоящее в скобках, а именно, добавим и вычтем единицу

$$\left(1+\left(\frac{x+3}{x-2}-1\right)\right)^{2x-1}=\left(1+\frac{x+3-x+2}{x-2}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{1}{(x-2)/5}\right)^{2x+1}$$

Теперь показатель степени $(2x+1)$ домножим и разделим на дробь

$\dfrac{x-2}{5}$,

получим $$\left(1+\frac{1}{(x-2)/5}\right)^{\frac{x-2}{5}\cdot(2x+1)\cdot\frac{5}{x-2}}.$$

Перейдем к пределу при $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(x-2)/5}\right)^{\frac{(2x+1)}{x-2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(x-2)/5}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(2x+1)}{x-2}}=e^{10},$$

так как $$\lim_{x\to\infty}\frac{5(2x+1)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(10x+5)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(10+5/x)}{1-2/x}=10.$$

Непрерывность функций

Определение 1. Функция $y=f(x)$ с областью определения D называется непрерывной в точке x_0, если выполнены следующие условия:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0\in D$;
2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Условие пункта 2 эквивалентно существованию равных односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x_0).$$

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $y=f(x)$.

При исследовании функции на непрерывность пользуются следующей **теоремой:**

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Определение 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a,b), где $a<b$, то говорят, что функция непрерывна на этом интервале.

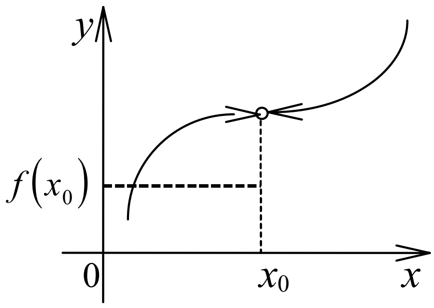
Следовательно, функция может иметь разрыв в точках, где она меняет способ своего задания или не определена.

Существуют следующие виды точек разрыва.

1. Если в точке x_0 существует конечный предел функции $f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

то такая точка называется точкой разрыва I рода (устранимый разрыв).

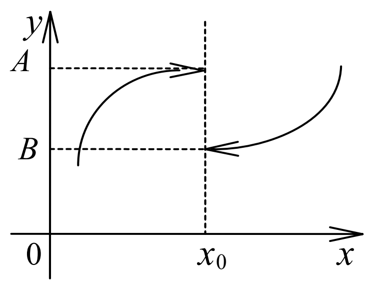


2. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода (точка скачка) функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы функции

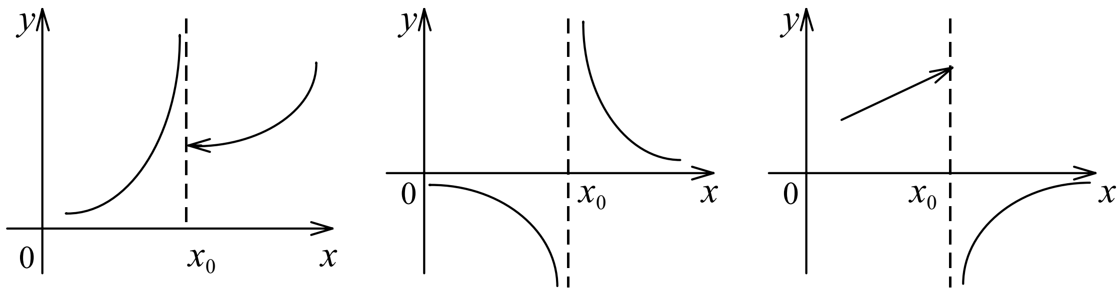
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B, \quad (A, B - \text{const}),$$

но они не равны между собой.



3.Точка x_0 называется точкой разрыва II рода или точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности $(\pm\infty)$.



Пример. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{при} \quad x \le 2, \\ x, & \text{при} \quad x > 2. \end{cases},$$

Данная функция определена на всей числовой оси. Она задана двумя различными формулами для интервалов $(-\infty; 2]$ и $(2, +\infty)$ и может иметь разрыв в точке $x_0=2$, где меняется способ ее задания. Найдем односторонние пределы в точке $x_0=2$:

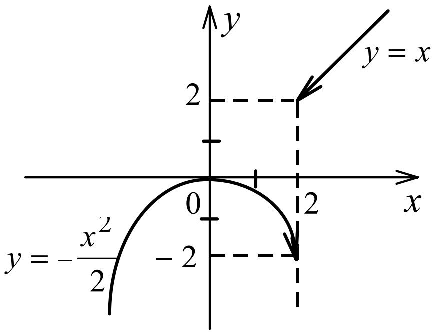
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot 2^2=-2,$$

так как слева от точки $x_0=2$ функция $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$,

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} x=2,$$

так как справа от точки $x_0=2$ функция $f(x)=x$.

Таким образом, в точке $x_0=2$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы, но они не равны между собой $-2\neq 2$. Следовательно, $x_0=2$ - точка разрыва I рода (точка скачка). Во всех остальных точках числовой оси данная функция непрерывна, так как формулы, которыми она задана определяют элементарные непрерывные функции. Построим график этой функции.



б) $y=\dfrac{1}{x^2-25}$

Функция y определена для всех значений кроме $x_1=5$ и $x_2=-5$. Эта функция элементарная, значит, она непрерывна во всей области своего определения $D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;+\infty)$. В точках $x_1=5$ и $x_2=-5$ функция y имеет разрывы, так как нарушается первое условие непрерывности. Чтобы определить характер разрыва в этих точках, найдем односторонние пределы

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(5-0-5)(5-0+5)}=\left(\frac{1}{-0\cdot 10}\right)=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(5+0-5)(5+0+5)}=\left(\frac{1}{+0\cdot 10}\right)=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty,$$

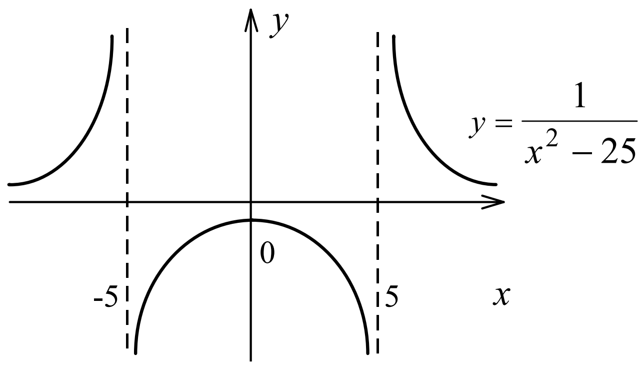
$$\lim_{x\to -5-0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(-5-0-5)(-5-0+5)}=\left(\frac{1}{-10\cdot(-0)}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to -5+0}\frac{1}{x^2-25}=\lim_{x\to -5+0}\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{(-5+0-5)(-5+0+5)}=\left(\frac{1}{-10\cdot(+0)}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

Поскольку все односторонние пределы равны бесконечности, функция $y=\dfrac{1}{x^2-25}$ терпит в точках $x_1=5$ и $x_2=-5$ разрывы II рода. Построим график функции



в) $y=3+e^{1/(2x+1)}$.

Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x_0=-1/2$. Из этого следует, что в точке $x_0=-1/2$ функция y имеет разрыв. Найдем односторонние пределы

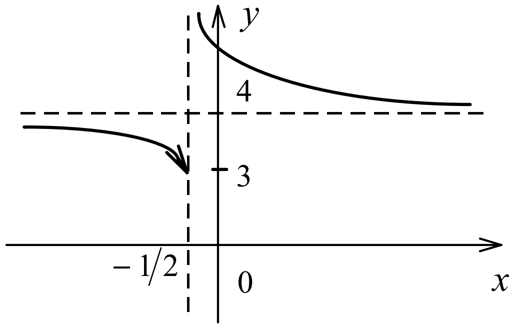
$$\lim_{x\to -1/2-0}\left(3+e^{\frac{1}{2x+1}}\right)=\left(3+e^{\frac{1}{2\cdot(-1/2-0)+1}}\right)=\left(3+e^{\frac{1}{-0}}\right)=\left(3+e^{-\infty}\right)=$$

$$=\left(3+\frac{1}{e^{\infty}}\right)=\left(3+\frac{1}{\infty}\right)=(3+0)=3,$$

$$\lim_{x\to -1/2+0}\left(3+e^{\frac{1}{2x+1}}\right)=\left(3+e^{\frac{1}{2\cdot(-1/2+0)+1}}\right)=\left(3+e^{\frac{1}{+0}}\right)=\left(3+e^{+\infty}\right)=$$

$$=(3+\infty)=\infty.$$

Так как предел справа в точке $x_0=-1/2$ равен бесконечности, заключаем, что x_0 – точка разрыва II рода. Построим график функции $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$



ПРОИЗВОДНАЯ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть функция $y = f(x)$ получила приращение $\Delta\ y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при Δx, стремящимся к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x и обозначается y'_x, или f'_x, или $\frac{dy}{dx}$.

Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой.

Задача 1. Используя определение, найти производные функций а) $y = x$, б) $y = \frac{2}{x}$.

Решение: а) Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее значение функции $y(x + \Delta x) = x + \Delta x$, теперь найдем Δy

$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Осталось вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $y' = (x)' = 1$.

б) пусть аргумент x получил приращение Δx, новому значению аргумента соответствует значение функции $y(x + \Delta x) = \frac{2}{x + \Delta x}$.

Найдем приращение Δy. $\Delta y=\dfrac{2}{x+\Delta x}-\dfrac{2}{x}=-\dfrac{2\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{2}{x^2}$, $y'=\left(\dfrac{2}{x}\right)'=2\left(x^{-1}\right)'=\dfrac{-2}{x^2}$.

Основные правила дифференцирования

Если C=const, а функции $U=U(x)$, $V=V(x)$ дифференцируемы, то

1. $(c)'=0$;
2. $(x)'=1$;
3. $(U\pm V)'=U'+V'$;
4. $(UV)'=U'V+V'U$;
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'V-V'U}{V^2}$;
6. $(CU)'=CU'$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$;
2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$;
3. $(\sin x)'=\cos x$;
4. $(\cos x)'=-\sin x$;
5. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
8. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
10. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;
11. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;
12. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}$;
13. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$;
14. $\left(e^x\right)'=e^x$;
15. $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$;
16. $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$;
17. $(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$;
18. $(\mathrm{cth}x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y = f(U)$ и $U = \varphi(x)$, т.е. $y = f[\varphi(x)]$, где y и U имеют производные, то $y' = f'_u U'_x$. Здесь $u = u(x)$ – промежуточный аргумент. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Задача 2. Найти производные функций:

а) $2x^3 + \dfrac{3}{x^2} - 6\sqrt[3]{x^5}$, б) $\left(x^5 - \ln x\right)^3$, в) $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}\right)^6$, г) $e^{-2x}\cos x \ln\sin x$

Решение: а) представим функцию в табличной форме как сумму степенных функций и затем только найдем производную.

$$y = 2x^3 + 3x^{-2} - 6x^{5/3},$$

$$y' = 2\cdot 3\cdot x^2 + 3\left(-2x^{-3}\right) - 6\cdot\frac{5}{3}x^{2/3} = 6x^2 - \frac{6}{x^3} - 10\sqrt[3]{x^2}.$$

б) введем промежуточный аргумент и затем воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$U = x^5 - \ln x,\ y = U^3,\ y' = 3U^2\cdot U'_x = 3\left(x^5 - \ln x\right)^2\cdot\left(5x^4 - \frac{1}{x}\right);$$

в) пусть $U(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$, где $\dfrac{x}{3} = V(x)$, тогда $U(x) = \operatorname{arctg} V$,

$$U' = \frac{1}{1+V^2}\cdot V'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{9+x^2}.$$

Окончательно: $y = U^6$, $y' = 6U^5\cdot U'_x = 6\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}\right)^5\cdot\dfrac{3}{9+x^2}$;

г) правило 4 можно распространить на любое число сомножителей, если перемножаемые функции дифференцируемы.

$y = U(x)\cdot V(x)\cdot Z(x)$, $\quad y' = U'\cdot V\cdot Z + U\cdot V'\cdot Z + U\cdot V\cdot Z'$, в данном случае

$$U = e^{-2x},\ U' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x},\ V = \cos x,\ V' = -\sin x,$$

$$Z = \ln\sin x,\ Z' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = e^{-2x}\left(-2\cos x\ln\sin x - \sin x\ln\sin x + \cos x\cdot\operatorname{ctg} x\right).$$

Дифференцирование сложной показательно-степенной функции

$y = U^V$. Логарифмическое дифференцирование.

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции. Чтобы найти производную функции U^V предварительно прологарифмируем ее по основанию e: $\ln y = V \ln U$, теперь воспользуемся правилом 3 и 6

$$\frac{1}{y} y' = V'_x \cdot \ln U + V \cdot \frac{1}{U} \cdot U'_x, \text{ откуда } \quad y' = U^V \cdot \left(V' \ln U + \frac{V}{U} U' \right) \quad (*)$$

Задача 3. Найти производные функций а) $(12 + x)^{\sin x}$, б) $\sqrt[x]{\operatorname{tg}^5 x}$.

Решение: а) воспользуемся формулой (*): Пусть $U = 12 + x$, $V = \sin x$, найдем $U' = 1$, $V' = \cos x$ и подставим в формулу (*):

$$y' = (12 + x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(12 + x) + \frac{\sin x}{12 + x} \cdot 1 \right)$$

б) сначала прологарифмируем $\ln y = \frac{5}{x} \ln \operatorname{tg} x = 5x^{-1} \ln \operatorname{tg} x$. Дифференцируя левую и правую части равенства, получим:

$$\frac{y'}{y} = 5\left(-x^{-2} \ln \operatorname{tg} x + x^{-1} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \right), \text{ теперь найдем } \quad y'$$

$$y' = \frac{5}{x^2} (\operatorname{tg} x)^{\frac{5}{x}} \left(-\ln \operatorname{tg} x + \frac{x}{\sin x \cdot \cos x} \right) \quad = \quad \sqrt[x]{\operatorname{tg}^5 x} \cdot \frac{5}{x^2} \left(\frac{2x}{\sin 2x} - \ln \operatorname{tg} x \right).$$

Метод, основанный на предварительном логарифмировании функции, не требует запоминания формулы и имеет более широкий спектр применения, в частности при дифференцировании большого количества сомножителей.

Задача 4. Найти производные функций:

а) $\sqrt[12]{\dfrac{e^{8x} x^{16}}{x^4 + 8}}$, в) $\dfrac{(x-3)^3 \cdot e^{6x}}{(x+3)^2 \operatorname{tg}^5 x}$.

Решение: а) воспользуемся свойствами логарифмической функции:

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b, \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \qquad \ln a^b = b \cdot \ln a, \qquad \ln e = 1.$$

Итак, $\ln y = \dfrac{1}{12}\left(8x + 16 \ln x - \ln\left(x^4 + 8\right)\right)$, $\quad \dfrac{1}{y} y' = \dfrac{1}{12}\left(8 + \dfrac{16}{x} - \dfrac{4x^3}{x^4 + 8} \right)$,

$$y' = \frac{1}{3} \sqrt[12]{\frac{e^{8x} x^{16}}{x^4 + 8}} \cdot \left(\frac{2x + 4}{x} - \frac{x^3}{x^4 + 8} \right).$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если зависимость функции y и аргумента x задана посредством параметра t $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\psi}{dt}}{\dfrac{d\varphi}{dt}}. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Это параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиуса R.

Решение. Находим $\dfrac{dx}{dt} = -R\sin t$ и $\dfrac{dy}{dt} = R\cos t$.

Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\mathrm{ctg}\,t$

Пример 2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ от функции: $x = \cos 3t$, $y = \mathrm{tg}^2 3t$.

Решение: $x'_t = -3\sin 3t$, $y'_t = 2\mathrm{tg}3t \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3t}$, теперь по формуле (1) найдем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\mathrm{tg}3t}{-\cos^2 3t \cdot \sin 3t} = \dfrac{-2}{\cos^3 3t} = -2\sec^3 3t$.

Производная неявной функции

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ не разрешено относительно функции $y(x)$, т.е. функция $y(x)$ задана неявно. Чтобы найти производную y'_x, надо продифференцировать левую и правую часть уравнения, учитывая, что y есть функция аргумента x.

Рассмотрим это правило на примерах.

Пример 1. Найти y'_x, если а) $x^2 + y^2 = 1$, б) $\cos(x + y) = y^3$.

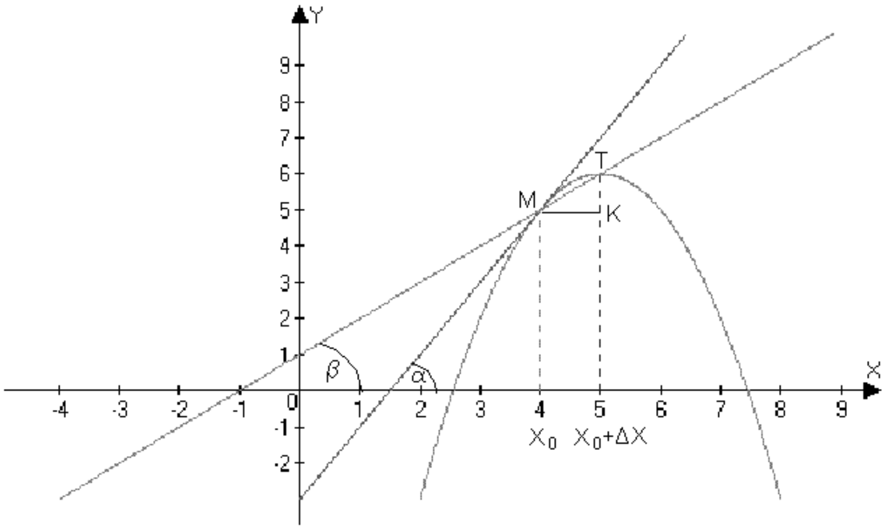
Решение: а) $2x + 2yy' = 0$, выразив y', получим $y' = -\dfrac{x}{y}$. y';

б) дифференцируя обе части этого уравнения, получим уравнение относительно y'. $-\sin(x + y)(x + y)'_x = 3y^2 y'_x$,

$-\sin(x + y)(1 + y'_x) = 3y^2 y'_x$;

найдем теперь $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sin(x+y)}{3y^2 + \sin(x+y)}$.

Геометрический смысл производной



Здесь α – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ и точке $M(x_0, y_0)$. Через две точки $M(x_0, y_0)$ и $T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ кривой $y = f(x)$ проведем секущую MT, ее угловой коэффициент $k_1 = \mathrm{tg}\beta = \dfrac{TK}{MK} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Двигая точку T по кривой к точке M, мы будем поворачивать секущую вокруг точки M, в результате секущая стремится занять положение касательной, проведенной к графику в точке, а угол β стремится к углу α – наклона касательной, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha = k,$$

где k – угловой коэффициент касательной. Известное уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ используем как уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0), с угловым коэффициентом $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$. Тогда $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (1) – уравнение касательной.

Задача. Найти уравнение касательной к графику функции а) $y = 2\sin^4 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, б) $x = t^4 - t + 3$, $y = t^6 - 4$ в точке $t = 1$.

Решение. а) Сначала вычислим ординату точки касания $y_0 = y(x_0) = 2\sin^4 \dfrac{\pi}{3} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \dfrac{9}{8}$. Затем производную в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$,

$y' = \left[8\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot 2\right]_{x=\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3}$. Это угловой коэффициент касательной.

Подставим найденные параметры в уравнение (1)

$$y - \frac{9}{8} = 3\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ – искомая касательная;}$$

б) кривая задана параметрически; найдем координаты точки касания, подставив значение параметра в уравнение кривой: $x_0 = 1 - 1 + 3 = 3$, $y_0 = 1 - 4 = 3$. Для отыскания углового коэффициента k воспользуемся формулой $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t^5}{4t^3 - 1}$, $k = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=1} = \frac{6}{4-1} = 2$, теперь запишем уравнение касательной $y + 3 = 2(x - 3)$, или $2x - y - 9 = 0$.

Дифференциал функции и формула приближенного вычисления

Определение. Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная бесконечно малому приращению аргумента Δx, отличающаяся от соответственного приращения функции Δy на величину более высокого порядка.

По определению производной: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, откуда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$, тогда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\cdot\alpha(\Delta x)$, где первое слагаемое и есть дифференциал

$$dy = f'(x)dx\ , \qquad \Delta x = dx\,,\ \Delta y \approx dy\,. \tag{2}$$

Определение дифференциала позволяет использовать его в приближенных вычислениях, заменив вычисление функции ее дифференциалом. Рассмотрим приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, или $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$, тогда $\quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. (3)

Это и есть формула приближенного вычисления. Ошибка, получаемая при приближенных вычислениях, есть бесконечно малая высшего порядка, чем приращение аргумента, т.к.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0\,.$$

Задача 1. Найти дифференциалы функций:

а) $\left(x^3+6x-1\right)^5$, б) $\operatorname{arctg} 8x$, в) $6^{\arcsin x}$.

Решение: а) $dy=f'(x)dx$, найдем сначала $f'(x)=5\left(x^3+6x-1\right)^4\left(3x^2+6\right)$ и затем $dy=15\left(x^3+6x-1\right)^4\left(x^2+2\right)dx$;

б) $y'=\dfrac{1}{1+(8x)^2}(8x)'=\dfrac{8}{1+64x^2}$, $dy=\dfrac{8dx}{1+64x^2}$;

в) $y'=6^{\arcsin x}\ln 6(\arcsin x)'=6^{\arcsin x}\dfrac{\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$dy=\frac{6^{\arcsin x}\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Задача 2. Найти приращение и дифференциал функции $y=x^2-x$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}1$. Вычислить абсолютную и относительную ошибки, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение $y+\Delta y=y(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)$, $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=$
$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x-\Delta x-x^2+x=\left[2x\Delta x+(\Delta x)^2-\Delta x\right]_{x=1,\Delta x=0{,}1}=0{,}11$;

$dy=\left(x^2-x\right)'dx=(2x-1)dx$, $[dy]_{x=1,\Delta x=0{,}1}=0{,}1$.

Абсолютная ошибка $|\Delta y-dy|=|0{,}11-0{,}1|=0{,}01$, относительная ошибка

$$\frac{|\Delta y-dy|}{\Delta y}\cdot 100\%=\frac{0{,}01}{0{,}11}\cdot 100\%\approx 9\%.$$

Задача 3. Вычислить приближенно а) $\operatorname{ctg} 44^\circ$, б) $\sqrt{10}$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (3) надо составить функцию $y=f(x)$ (по виду вычисляемого выражения) и выбрать начальные условия так, чтобы Δx было мало, а $f(x_0)$ можно было легко подсчитать. В случае а) выбираем $y=\operatorname{ctg} x$, $x_0=45^\circ$,

$$\Delta x=x-x_0=44^\circ-45^\circ=-1^\circ=-\frac{\pi}{180}\approx-\frac{3{,}142}{180},\quad f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

$$f'(x)=(\operatorname{ctg} x)'=\left[\frac{-1}{\sin^2 x}\right]_{x=x_0}=-\left(\sqrt{2}\right)^2=-2,\qquad f(x_0)=\operatorname{ctg} 45^\circ=1,$$

$$\operatorname{ctg} 44^\circ\approx 1+2\cdot\frac{\pi}{180}\approx 1+\frac{3{,}142}{90}\approx 1{,}035;$$

б) чтобы Δx было мало, необходимо извлечь целую часть корня, т.е.

$\sqrt{10}=\sqrt{1+9}=\sqrt{9\left(1+{}^{1}\!/_{9}\right)}=3\sqrt{1+{}^{1}\!/_{9}}$, откуда $x_0=1$, $\Delta x=\frac{1}{9}$, $f(x)=3\sqrt{x}$,

$f(x_0)=3$, $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0)=\frac{3}{2}$,теперь вычислим приближенно $\sqrt{10}$:

$$\sqrt{10}=3\sqrt{1+{}^{1}\!/_{9}}\approx 3+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\approx\frac{19}{6}=3{,}1(6)\approx 3{,}17.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 1. Производной второго порядка от функции $f(x)$ называется производная от производной первого порядка и обозначается символом y'' или f'', или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Пример. $y=\sin^2 5x$, $y'=2\sin 5x\cdot\cos 5x\cdot 5=5\sin 10x$, $y''=50\cos 10x$.

Определение 2. Производной n-го порядка называется производная первого порядка от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$, или $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Пример. $y=\ln(x+3)$. Найти $y^{(n)}(x)$.

$y'=\frac{1}{x+3}=(x+3)^{-1}$, $y''=-(x+3)^{-2}$, $y'''=1\cdot 2\cdot(x+3)^{-3}=2!\,(x+3)^{-3}$, $y^{(4)}=-3!\,(x+3)^{-4}$, используя метод математической индукции, запишем формулу производной n-го порядка $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(x+3)^{-n}(n-1)!$

Определение 3. Дифференциалом высшего порядка функции называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=y^{(n)}dx^n$, в частности $d^2y=d(dy)=d(y'dx)=d(y')dx=$ $=y''dx^2$, здесь $dx=\text{const}$.

Пример: $y=\text{arctg}2x$. Найти d^2y.

$$y'=\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2,\ y''=-1\cdot 2\left(1+4x^2\right)^{-2}2\cdot 4x=-\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2};$$

Тогда $$d^2y=-\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}dx^2.$$

Производная второго порядка от функции, заданной параметрически.

Если $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, то производные $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, $y''_{xx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, последовательно могут быть вычислены по формулам:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\quad y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}\ \text{и т. д.}$$

Для производной второго порядка имеет место формула

$$y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2}.$$

Пример. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции $\begin{cases}x=t+\ln\cos t\\ y=t-\ln\sin t\end{cases}$

Решение. Найдем сначала $x'_t=1-\dfrac{\sin t}{\cos t}=1-\mathrm{tg}\,t$,

$$y'_t=1-\mathrm{ctg}\,t=1-\frac{1}{\mathrm{tg}\,t}$$

тогда $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\mathrm{ctg}\,t}{1-\mathrm{tg}\,t}=-\mathrm{ctg}\,t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(-\mathrm{ctg}\,t\right)'_t}{x'_t}=\frac{1}{\sin^2 t\cdot\left(1-\mathrm{tg}\,t\right)}.$$

Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших существует и равен отношению их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$ если выполняются условия:

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a и $\varphi(x)\neq 0$ в этой окрестности.

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (или $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$).

3) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ конечный или бесконечный.

Здесь a может быть числом или одним из символов: $+\infty, -\infty, \infty$.

Задача 1. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x-\pi}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение. а) Подставив предельное значение аргумента $x=\pi$, получаем неопределенность $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, т.к. $tg\pi=0$, $\pi-\pi=0$ и функции дифференцируемы.

Найдем $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x-\pi}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\mathrm{tg}x)'}{(x-\pi)'}=\dfrac{1}{\cos^2\pi}=1$.

б) При $x\to\infty$ имеем неопределенность $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Полученный предел снова представляет неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, применяя еще раз правило Лопиталя, найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$.

Другие виды неопределенностей $\{\infty-\infty\}$, $\{0\cdot\infty\}$, $\left\{1^\infty\right\}$, $\left\{0^0\right\}$ можно свести к виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Задача 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Подставим предельное значение аргумента, получим неопределенность $\{\infty-\infty\}$, которая легко сводится к частному:

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-tgx}{x\cdot tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-{}^{1}\!/\!_{\cos^2 x}}{tgx+{}^{x}\!/\!_{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x\cdot tgx+x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{\cos x} = 0$.

Возрастание, убывание функции. Точки экстремума

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке $[a,b]$, если для любых $x_1 < x_2$ этого промежутка $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Функция возрастающая (убывающая) называется монотонной.

Теорема 1. (Условие монотонности)

Если функция $f(x)$ 1) определена на $[a,b]$, 2) имеет конечную производную $f'(x)$ на (a,b), тогда, чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Задача 1. Найти интервалы монотонности функции $y = 3x - x^3$.

Решение. Область определения функции $D(f) = (-\infty, \infty)$, $f(x)$ дифференцируема всюду в области определения: $f'(x) = 3 - 3x^2$.

Решим неравенство $f'(x) > 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 > 0$, $3(1 - x^2) > 0$,

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ − это интервал возрастания функции.

Соответственно неравенство $3 - 3x^2 < 0$ справедливо для всех $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ – область убывания функции.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума), если в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всех x этой окрестности.

Теорема 2. (Необходимое условие существования экстремума)

Если $f(x)$ 1) определена в окрестности точки x_0, 2) дифференцируема в точке x_0 и 3) имеет в ней локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная $f'(x) = 0$ называются критическими.

Замечание. Функция может иметь экстремум и в точках, где первая производная не существует. Например: $y = \begin{cases} \ln x, & x \ge 1, \\ -\ln x, & x < 1 \end{cases}$ Функция непрерывна в точке $x = 1$, но не дифференцируема т.к. $\lim\limits_{x\to 1+0} y' = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y' = -1$ односторонние пределы не равны, значит, $y'(x)$ не существует в точке $x = 1$, но функция имеет минимум.

Теорема 3. (Достаточное условие экстремума)

Если функция $f(x)$: 1) непрерывна в точке x_0, 2) дифференцируема в некоторой области $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 3) $f'(x_0)=0$ либо не существует и 4) при переходе через точку x_0 производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем, если производная слева от x_0 отрицательна, а справа положительна, то x_0 – точка минимума; если слева от x_0 производная положительна (функция возрастает) а справа отрицательна (функция убывает), то x_0 – точка максимума.

Замечание: в промежутке между критическими точками производная сохраняет знак, следовательно, это промежутки монотонности.

Теорема 4. (Исследование на экстремум с помощью второй производной или второе достаточное условие экстремума).

Если 1) в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x_0)=0$, 2) существует вторая производная, 3) $f''(x_0)\neq 0$ в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, то при $f''(x_0)>0$ функция имеет минимум, а при $f''(x_0)<0$ – максимум.

Итак, при исследовании функции на экстремум необходимо пользоваться правилами:

1. Найти первую производную $y'=f'(x)$
2. Найти критические точки x_i, решив уравнения $y'=0$ и $y'=\infty$.
3. Проверить, меняет ли знак первая производная при переходе через точку x_i или установить знак второй производной $f''(x_i)$, классифицировать экстремум.
4. Найти значение функции в экстремальных точках.

Задача. Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{1}{x}\ln x$.

Решение. Область определения $D(f)=(0,\infty)$; $y'=\frac{1}{x^2}\cdot(1-\ln x)$,

$y'=0$, $\ln x=1$, $x_1=e$, $y'=\infty$ при $x=0$. Это значение x не принадлежит области определения функции. Значит, $x=e$ – единственная критическая точка. Проверим знак первой производной слева и справа от нее.

При $x<e$, $f'(x)=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)>0$, функция возрастает, при $x>e$, $f'(x)<0$ функция убывает, значит $x=e$ – точка максимума, $y(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$ – максимальное значение функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, то она достигает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения находятся либо на концах промежутка, либо в экстремальных точках.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значения функции

1. Найти первую производную и все критические точки x_i, принадлежащие $[a,b]$.
2. Вычислить значения $f(x_i)$.
3. Вычислить значения функции на концах промежутка.
4. Сравнить все полученные значения функции $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$ и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x + 7$ на промежутке $[-3{,}0]$.

Решение. Необходимое условие экстремума $y' = 0$, поэтому $3x^2 - 12 = 0$, а корни уравнения $x = \pm 2$ являются критическими точками, но промежутку принадлежит только $x = -2$. Найдем теперь $y(-2) = 23$ и на концах промежутка $y(-3) = 16$ и $y(0) = 7$. Среди них самое большое 23, самое меньшее 7.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Пусть кривая задана функцией $y = f(x)$.

Определение 1. Кривая называется выпуклой вверх (вниз) на отрезке $[a,b]$, если все точки кривой находятся ниже (выше) любой касательной к графику функции.

Определение 2. Точка $M_0(x_0, y_0)$, отделяющая вогнутую часть от выпуклой, называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на некотором промежутке, причем $f''(x) < 0$ для любого x из этого промежутка, то на этом промежутке график функции выпуклый, если $f''(x) > 0$, то график вогнутый.

Из теоремы следует, что для нахождения промежутков (выпуклости) вогнутости надо найти вторую производную функции и определить промежутки, где она положительна (отрицательна). Необходимым условием существования точки перегиба является обращение в нуль второй производной или ее отсутствие в точке x_0, то есть условие $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) = \infty$.

В случае выполнения одного из этих условий точка x_0 называется критической точкой второго рода.

Достаточным условием того, что точка M_0 – точка перегиба является смена знака второй производной при переходе через критические точки второго рода.

Правило нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба функции.

1. Указать область определения функции.
2. Найти критические точки второго рода, принадлежащие области определения функции.
3. Определить знак второй производной в каждом интервале области определения между соседними критическими точками.
4. По знаку $f''(x)$ установить интервалы выпуклости, вогнутости и по смене знака второй производной в окрестности точки – наличие или отсутствие точки перегиба.

Асимптоты графика функции

<u>Определение.</u> Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции при $x \to \infty$ или $y \to \infty$.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

1. Вертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, если при $x \to a$ хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ бесконечен, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ т. е. в точке $x = a$ функция терпит разрыв второго рода.

Задача. Найти вертикальные асимптоты функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Решение. При $x = -1$ и $x = 1$ функция неопределена. Найдем односторонние пределы $f(x)$ при $x \to \pm 1$.

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{1}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{x^2-1} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x^2-1} = +\infty;$$

Следовательно, $x = 1$, $x = -1$ вертикальные асимптоты графика.

Наклонные и горизонтальные асимптоты

<u>Определение.</u> Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$,если эту функцию можно

представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$, т.е. разность между ординатами точек кривой и асимптоты при $x\to\pm\infty$ есть бесконечно малая величина.

Теорема. Для того, чтобы график функции имел наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{\to\pm\infty}[f(x)-kx]$, причем эти пределы могут быть неравными при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Если $k=0$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$, получаем горизонтальную асимптоту $y=b$. Таким образом, прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$.

Задача 2. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение. $D(f)=(\infty,1)\cup(1,\infty)$.

Вычислим $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)\cdot x}=$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1-1/x)}=1,$$

$k=1$.

Найдем b. $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}=1$. Получим уравнение асимптоты $y=x+1$; убедимся, что утверждение теоремы выполняется. Преобразуем функцию, выделив целую часть.

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$, где $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

, $f(x)=x+1+\alpha(x)$

Кроме того, функция имеет вертикальную асимптоту $x=1$, т. к.

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=\left\{-\frac{1}{0}\right\}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\left\{+\frac{1}{0}\right\}=+\infty$$

Задача 3. Найти асимптоты графика функции $y=e^{1/(2-x)}$.

Решение. Найдем $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. При $x=2$ функция $y=e^{1/(2-x)}$ терпит разрыв второго порядка, т. к.

$$\lim_{x\to 2+0} e^{1/(2-x)} = e^{-1/0} = e^{-\infty} = 0,\ \lim_{x\to 2-0} e^{1/(2-x)} = e^{1/0} = e^{\infty} = \infty.$$

Таким образом, $x=2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем горизонтальные асимптоты.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{2-x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$, следовательно, $y=1$ является горизонтальной асимптотой.

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции, исследовать ее поведение на границах области определения.
2. Найти точки разрыва и установить их характер с помощью односторонних пределов.
3. Исследовать периодичность, четность (нечетность), найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика.
7. Построить график, используя результаты исследования.

Задача 4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x + \frac{2x}{x^2-1}.$$

1. Найдем область определения $D(f)$. из условия $x^2-1\neq 0$, $x\neq 1, x\neq -1$, следовательно,

2. $x_1=1,\ x_2=-1$ – точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to -1+0}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2-1} = -\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x(x^2+1)}{x^2-1} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right) = 1+\frac{2}{-0} = 1-\infty = -\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right) = 1+\frac{2}{0} = \infty.$$

Отсюда следует, что $x_1=1$ и $x_2=-1$ – точки разрыва второго рода, и $x=\pm 1$ – вертикальные асимптоты.

3. Для установления симметрии графика функции найдем $f(-x) = -x + \dfrac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -x - \dfrac{2x}{x^2-1} = -\left(x+\dfrac{2x}{x^2-1}\right) = -f(x)$, это означа-

ет, что $f(x)$ – нечетная функция, и ее график симметричен относительно начала координат. Достаточно провести ее исследование для $x \geq 0$. Очевидно, что функция не является периодической. Точка О (0,0) является единственной точкой пересечения с осями координат, т.к. $f(0)=0$.

4. Первая производная: $y' = 1 + 2\dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 1 - \dfrac{2\left(x^2+1\right)}{(x^2-1)^2}$,

Критические точки найдем из условий $y'=0$, $y'=\infty$.

а) $1 - \dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = 0$, $\dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = 0$, $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, $x^2 - 1 \neq 0$.

Решая биквадратное уравнение, найдем $x1, x2 \cong \pm 2{,}05$.

б) $1 - \dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \infty$, $x^4 - 4x^2 - 1 \neq 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x3, x4 = \pm 1$.

Таким образом, критические точки функции: $x1 = \sqrt{4{,}236} \neq 2{,}05$, $x2 = -\sqrt{4{,}326} \approx -2{,}05$, а точки $x3, x4 = \pm 1$ не входят в область определения, следовательно, не являются критическими точками. Проверим критические точки на экстремум по первому признаку.

$y' = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2} < 0$, при $0 < x < 2{,}05$, $y' = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2} > 0$, при $x > 2{,}05$

Так как производная меняет знак при переходе через критическую точку, то в точке $x = 2{,}05$ функция имеет минимум. Составим таблицу.

x	0	(0, 1)	1	(1; 2.05)	2,05	(2,05, ∞)
$f(x)$	0	$\downarrow$	не сущ.	$\downarrow$	(min) 3,4	$\uparrow$
$f'(x)$	0	–	не сущ.	–	0	+

5. Найдем $y'' = \left(1 - 2\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)' = \dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2+3)^3}$. Критические точки второго рода найдем из условия $y''=0$, $4x(x^2+3)=0$, $x1=0$; при $(x^2-1)^3 = 0$,откуда $x = \pm 1$. Так как $x = \pm 1$ не входят в область определения функции, то $x=0$ единственная критическая точка. Проверим знак второй производной при переходе через точку $x=0$ $y''>0$ при $x<0$,

$y''<0$ при $x>0$. y'' меняет знак с ”+” на “-“ , значит, $x=0$ - точка перегиба, и график меняет вогнутость на выпуклость при переходе через критическую точку. Итак, в (0, 1) функция выпукла, а в $(1,\infty)$ – вогнута.

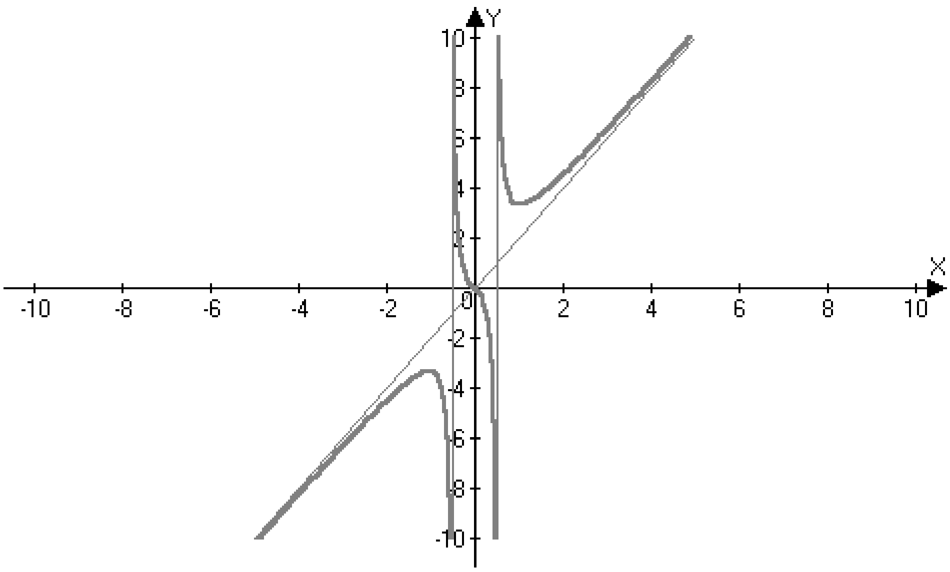
6. Найдем асимптоты. Наклонные асимптоты имеют вид: $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2x}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1} = 0, b = 0,$$

отсюда уравнение наклонной асимптоты $y = x$. Горизонтальные асимптоты отсутствуют, а вертикальные были найдены в п. 2.

По результатам исследования построим график. Так как функция нечетная, то можно построить график для $x > 0$ и отобразить его симметрично начала координат.



5. Варианты контрольных заданий для контрольной работы № 2

Введение в анализ

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{x^3+2x^2+9x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2}{x}}$;

1.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+25}{3x^3+2x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+4x}{x^3+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+1}$;

1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^3+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{1-\sqrt{x-1}}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{10x^3+6x+16}{x^3+x^2-4x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x+3}$;

1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^6+2}+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{x-1}$;

1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+2x+1}{7x^2+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+x^2-9x-9}{x^3-2x^2-x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{3x-1}$;

1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-4}{x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+3}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-x^2+2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{4x+1}$;

1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-3}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{2x^3+7x^2+8x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x^2}{1-x^2}\right)^{3x^2+1}$;

1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2+x-1}{x^3+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^3-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{1+x^2-2x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-1}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{x+3}$;

1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^5-1}-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-4x-12}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{3+x}\right)^{\frac{3x^2+1}{x}}$;

1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}+x}{2x+\sqrt{x^2+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2+3x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos 2x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{6+x^2}\right)^{\frac{x^3-1}{x}}$;

1.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{18+9x-2x^2-x^3}{x^3+x^2-2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$; α,β – числа; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2+3x}\right)^{\frac{x^2+2}{x}}$;

1.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+1}+x}{(3x+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-2x^2+x^3-4}{9x^2-5x^3+2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$;

1.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+1}+x^2}{(x+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3x^2+x^3+3}{x^3+5x^2+3x-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^2\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}$;

1.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+4x^2-2x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; в)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-9x+5}{3x^3-10x^2+11x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 6x}{x+\operatorname{tg}3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-3}\right)^{\frac{x^3+1}{4x}}$;

1.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{2x^3-3x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x-6x^2+2x^3}{x^3-2x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{5x+1}{2}}$;

1.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{3x^3-3x^2+5x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{\cos 2x-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x-3}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$;

1.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2+1}{4x^3+2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-5x+6\right)^2}{x^3-3x^2+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-1}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+7}\right)^{x+3}$;

1.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^4+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3+x^2}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+12x+9}{7x^3+7x^2+2x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x(1-\cos 4x)}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{\frac{5x+1}{2}}$;

1.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+9x+14}{7x^3+14x^2+2x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,4x}{\cos 6x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x+3}\right)^{\frac{2x-1}{3}}$;

1.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+x+5}{x^3+2x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{6+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(x^3-8\right)}{x^3-3x^2+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x^2}$.

Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность, найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

2.1. а) $y=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1-x, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2;\end{cases}$ б) $y=1+2^{\frac{1}{1-x}}$; в) $y=\dfrac{1}{x(x-2)}$;

2.2. а) $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\le x<4,\\ 2\sqrt{2}, & x\ge 4;\end{cases}$ б) $y=5^{\frac{4}{x+3}}$; в) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

2.3. а) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 2,\\ 4, & x>2;\end{cases}$ б) $y=2^{-\frac{1}{3x+2}}$; в) $y=\dfrac{1+x}{4-x^2}$;

2.4. а) $y=\begin{cases}1+x, & x\le 0,\\ 1-x^2, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$ б) $y=3^{\frac{1}{2x+3}}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$;

2.5. а) $y=\begin{cases}3x+1, & x\le 0,\\ 1-x^2, & 0<x\le 2,\\ 2+x, & x>2;\end{cases}$ б) $y=2+9^{\frac{1}{x+1}}$; в) $y=\dfrac{1}{9-x^2}$;

2.6. а) $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ -x^2, & 0<x\le 1, \\ 2, & x>1; \end{cases}$ б) $y=2^{\frac{-1}{1-3x}}$; в) $y=\dfrac{3}{2x^2-x}$;

2.7. а) $y=\begin{cases} \sin x, & x\le 1, \\ x, & 0<x<2, \\ 0, & x\ge 2; \end{cases}$ б) $y=e^{\frac{1}{x-7}}$; в) $y=\dfrac{2-x}{x^2-1}$;

2.8. а) $y=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sqrt{x}, & 0\le x<4, \\ x, & x\ge 4; \end{cases}$ б) $y=3+5^{\frac{1}{x+1}}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$;

2.9. а) $y=\begin{cases} \cos x, & x\le 1, \\ 0, & \pi/2<x\le \pi, \\ x, & x>\pi; \end{cases}$ б) $y=1+2^{\frac{1}{3x-1}}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+4x-5}$;

2.10. а) $y=\begin{cases} x-1, & x\le 1, \\ \sqrt{x}, & 1<x\le 4, \\ 6-x, & x>4; \end{cases}$ б) $y=1+2^{\frac{1}{4x+1}}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+x-12}$;

2.11. а) $y=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\le 1, \\ x-1, & 1<x\le 2, \\ 3-x, & x>2; \end{cases}$ б) $y=e^{\frac{-1}{2x+3}}$; в) $y=\dfrac{x-1}{x^2-9}$;

2.12. а) $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 4-x, & x\ge 2; \end{cases}$ б) $y=9^{\frac{1}{2x+4}}$; в) $y=\dfrac{x}{9-x^2}$;

2.13. а) $\begin{cases} 1/(x^2+1), & x\le 0, \\ 1-x^2, & 0<x<1, \\ 1-x, & x\ge 1; \end{cases}$ б) $y=7^{\frac{1}{3x+4}}$; в) $y=\dfrac{2}{x(3-x)}$;

2.14. а) $y=\begin{cases}-x, x<0,\\ 1+x,\ 0\le x\le 4,\\ \sqrt{x}+3, x>4;\end{cases}$ б) $y=2+3^{\frac{-1}{x+1}}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+x}$;

2.15. а) $y=\begin{cases}x^2,\ x\le 1,\\ x,\ 1<x\le 4,\\ 1,\ x>4;\end{cases}$ б) $y=1-2^{\frac{1}{2-3x}}$ в) $y=\dfrac{1}{|x-1|}$;

2.16. а) $y=\begin{cases}-x, x\le 0,\\ \sqrt{x},\ 0<x\le 4,\\ (x-4)^2, x>4;\end{cases}$ б) $y=4^{\frac{1}{2x+5}}$; в) $y=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$;

2.17. а) $y=\begin{cases}-x-2, x<-2,\\ -\sqrt{4-x^2},\ -2<x\le 2,\\ x-2, x>2;\end{cases}$ б) $y=1+5^{-\frac{1}{2+x}}$; в) $y=\dfrac{x}{4-x^2}$;

2.18. а) $y=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, x\le 0,\\ 3\sin x,\ 0<x\le \pi/2,\\ \pi/4, x\ge \pi/2;\end{cases}$ б) $y=1-3^{\frac{1}{2-3x}}$; в) $y=\dfrac{1}{x(2x+3)}$;

2.19. а) $y=\begin{cases}x^2, x\le 1,\\ x^2,\ 1<x\le 2,\\ -1, x>2;\end{cases}$ б) $y=3+2^{\frac{1}{x+1}}$; в) $y=\dfrac{1}{4x^2-1}$;

а) $y=\begin{cases}-x, x\le 0,\\ x^2,\ 0<x<1,\\ \ln x, x\ge 1;\end{cases}$ б) $y=1+e^{\frac{1}{x+5}}$; в) $y=\dfrac{x}{1-4x^2}$;

Производная функции и ее приложения

1. Найти первую производную для указанных функций.
2. Функция задана параметрически. Найти y'_x, y''_{xx}.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на замкнутом отрезке.
4. Вычислить пределы, применив правило Лопиталя.
5. Исследовать функции по полной схеме и построить графики.
6. Вычислить приближенно значение выражения с помощью дифференциала.

Вариант 1

1. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y = \left(e^{\cos x}+3\right)^2$;

в) $y = \ln\sin(2x+5)$; г) $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}\left(x^2+4\right)}{x^5}}$; д) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = 5xy$;

2. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{\left(1-t^2\right)^3} \end{cases}$; 3. $f(x) = x^3 - 12x + 7, [0,3]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\alpha x)^{1/\sin\beta x}$;

5. а) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 6. $\sqrt[3]{65}$.

Вариант 2

1. а) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y = \left(5^{\operatorname{tg}2x} - x^2\right)^3$;

в) $y = \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$; г) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^5 e^{6x}}{x^3-4x}}$; д) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$;

2. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2 \\ y = \ln\left(1+t^4\right) \end{cases}$; 3. $f(x) = x^5 - \dfrac{5x^3}{3} + 2, [0,2]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x/2}-2-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{1-x^3} - \dfrac{4}{1-x^4}\right)$;

5. а) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y = xe^{-x}$; 6. $\cos 31^\circ$.

Вариант 3

1. а) $y = x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{(1+x)^2}{x^2e^{7x}}}$; в) $y = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$;

г) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$; д) $y\sin x = \cos(x-y)$;

2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$; 3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x\right)^{1/x}$;

5. а) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y = e^{1/x}$; 6. $\mathrm{arctg}1{,}1$.

Вариант 4

1. а) $y = \dfrac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$; б) $y = \left(2^{\cos x} + \sin^3 x\right)^2$;

в) $y = x^{-\mathrm{tg}x}$; г) $y = \left(1+\mathrm{ctg}^2 3x\right)e^{-x}$; д) $\dfrac{y}{\text{x}} = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$;

2. $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$; 3. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3,1]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 2x - 12x}{7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$;

5. а) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 6. $\arcsin 0{,}54$.

Вариант 5

1. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; б) $y = \left(4^{\arccos 2x} - \sqrt{1-4x^2}\right)^3$;

в) $y=e^{-\cos 5x}$; г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{3x}\cdot x^5}{\left(1+x^2\right)^3}}$; д) $\left(e^x-1\right)\left(e^y-1\right)=1$;

2. $\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$; 3. $f(x)=x^3-3x+1, \left[\dfrac{1}{2},2\right]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\mathrm{tg}2x-6x}{2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$;

5. а) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y=x\ln x$; 6. $\lg 11$.

Вариант 6

1. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\sqrt[5]{x^3+1}$; б) $y=2\mathrm{tg}^3\left(x^2+1\right)$;

в) $y=(\mathrm{arctg}x)^x$; г) $y=\left(3^{\mathrm{ctg}x}+\ln\sin x\right)^3$; д) $y^2x-e^{y/x}=0$;

2. $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$; 3. $f(x)=x^4+4x, [-2,2]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)+3x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

5. а) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y=\ln\left(x^2-4\right)$; 6. $\mathrm{tg}46^\circ$.

Вариант 7

1. а) $y=5\sqrt{4x+3}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y=x^2e^{\cos x}$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$; г) $y=\arccos(\mathrm{tg}x)$; д) $x+y+e^{xy}=2$;

2. $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=\cos t \end{cases}$; 3. $y=3x^4-16x^3+2, [0,4]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$;

5. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y=\ln\left(x^2-4x+8\right)$; 6. $\sqrt[3]{26}$.

Вариант 8

1. а) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2\cdot\left(x^2+1\right)^3}$; б) $y=\sqrt[3]{\left(1+\sin^3 2x\right)^2}$;

в) $y=\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)e^{\operatorname{arctg}^2 x}$;

г) $y=(\arcsin 3x)^{x^2}$; д) $x\ln\left(1+y^2\right)+y\ln\left(1+x^2\right)=0$;

2. $\begin{cases} x=t^2+t+10 \\ y=t^3+t \end{cases}$; 3. $y=\sin x-\dfrac{x}{2},\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x-4x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{arctg}x\right)^2$;

5. а) $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$; б) $y=x^2-2\ln x$; 6. $(1{,}021)^{11}$.

Вариант 9

1. а) $y=\dfrac{2}{x+\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y=\arccos\left(e^x\right)$;

г) $y=x^{\arcsin x}$; д) $\ln y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

2. $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=e^{t^3} \end{cases}$; 3. $y=x^5-\dfrac{5x^3}{3}+7,[-2,1]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{1/x}$;

5. а) $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$; 6. $\sqrt[4]{15,8}$.

Вариант 10

1. а) $y=x+\sqrt[5]{\dfrac{1+x^5}{1-x^5}}$; б) $y=\mathrm{tg}^2\left(x^3+1\right)$; в) $y=\mathrm{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

г) $y=(1+\sin 2x)^{\cos 2x}$; д) $x^2y^2+\arccos(2x+y)=0$;

2. $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\sqrt{t^3} \\ y=\ln\left(1+t^3\right)^3 \end{cases}$; 3. $y=\dfrac{8-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $[-8,0]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\pi/2-x}$;

5. а) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$; б) $y=x^2e^{-x}$; 6. $(0,95)^5$.

Вариант 11

1. а) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{2-2x-x^2}}$; б) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}}{x^3e^{5x}}$; в) $y=\sin\ln\left(x^2+4\right)$;

г) $y=(\mathrm{tg}x)^{x^2}$; д) $e^x+e^y=e^{xy}$;

2. $\begin{cases} x=e^{t^2-2t} \\ y=t^2-2t \end{cases}$; 3. $y=\dfrac{x+3}{x^2+7}$, $[-10,-3]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+e^x\right)^{1/x}$;

5. а) $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x$; б) $y=2x-\arcsin x$; 6. $\sin 61^\circ$.

Вариант 12

1. а) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x+1}}$; б) $y=\cos^2(\sin x)$; в) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $y\cos x=\sin(y-x)$; д) $y=(\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x)^3$;

2. $\begin{cases} x=2\sin 2t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$; 3. $y=x^4-2x^2+5,\ [-1,2]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$;

5. а) $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x$; б) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; 6. $\sqrt{82}$.

Вариант 13

1. а) $y=\sqrt{2x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $y=x^3e^{\mathrm{tg}x}$; в) $y=(\ln x+\sin\ln x)^2$;

г) $y=(\arccos x)^{1/x}$; д) $yx=\ln(x+y)$;

2. $\begin{cases} x=\ln\sin t \\ y=\mathrm{tg}t \end{cases}$; 3. $y=x+2\sqrt{x},\ [0,4]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$;

5. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=x^3e^{-x}$; 6. $e^{1{,}03}$.

Вариант 14

1. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+4\sqrt{x^2+1}$; б) $y=e^{\sin^2 x}\cos x$; в) $y=\mathrm{tg}\left(x^2+\sin x\right)$;

г) $y=(\sin x)^{\ln x}$; д) $2^x+2^y=2^{x+y}$;

2. $\begin{cases} x=\mathrm{tg}^2 t \\ y=\ln\sin t \end{cases}$; 3. $y=x^3-3x^2+6x-2,\ [-1,2]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$;

5. а) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$; б) $y=x+\dfrac{2x}{x^2-1}$; 6. $\mathrm{ctg}46^\circ$.

Вариант 15

1. а) $y=\dfrac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x^2-4}$; б) $y=(\sin x+1)\mathrm{tg}2x$; в) $y=\left(3^{\sin x}-\cos^2 x\right)^2$;

г) $y=(\mathrm{tg}x)^{x^2}$; д) $\frac{x}{y}=\mathrm{tg}\frac{y}{x}$;

2. $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t^3+3t^2 \end{cases}$; 3. $y=\frac{x-1}{x+1}$, $[0,4]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(e^{1/x}-1\right)\right)$;

5. а) $y=x^3e^{-x}$; б) $y=\frac{x^2}{3-x^2}$; 6. $(1{,}03)^{12}$.

Вариант 16

1. а) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; б) $y=\sin^2\frac{x}{3}\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$; в) $y=\mathrm{tg}^2(1+\cos x)$;

г) $y=x^{\mathrm{arctg}x}$; д) $\ln y=\arcsin\frac{y}{x}$;

2. $\begin{cases} x=t^3-1 \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$; 3. $y=3x-x^3$, $[-2,3]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos 2x}{e^{3x}-\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$;

5. а) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=x-\ln(x-1)$; 6. $4^{2{,}02}$.

Вариант 17

1. а) $y=\sqrt{x}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x+1}\right)$; б) $y=\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2-x}}$; в) $y=\mathrm{ctg}^3(\sin x)$;

г) $y=(\ln x)^{\mathrm{tg}x}$; д) $y=\mathrm{arctg}(x+y)$;

2. $\begin{cases} x=\ln\left(t^2-1\right) \\ y=t-1 \end{cases}$; 3. $y=\frac{x-2}{x^2+5}$, $[-2,3]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$;

5. а) $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$; б) $y=x^3e^x$; 6. $\arcsin 0{,}58$.

Вариант 18

1. а) $y=3\sqrt{x^2+4}-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$; б) $y=x^3e^{\mathrm{tg}x}$; в) $y=\ln\left(\ln x+x^2\right)$;

г) $y=\ln\dfrac{x^3\cos^2 x}{\sqrt{1-x^4}}$; д) $x+y+2^{xy}=2$;

2. $\begin{cases} x=e^{t^2} \\ y=t^2+1 \end{cases}$; 3. $y=x+\dfrac{1}{x}$, $[-10,-0{,}1]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\sin\dfrac{a}{x}\right]$;

5. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$; 6. $8^{3{,}03}$.

Вариант 19

1. а) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x}}{\sqrt{x+1}}$; б) $y=x^2\mathrm{arctg}x^2$; в) $y=\arcsin^2 e^{2x}$;

г) $y=(\cos x)^{1/x+1}$; д) $y^2=e^yx+x^2$;

2. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\mathrm{ctg}^2 t \end{cases}$; 3. $y=81x-x^4$, $[-1,4]$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$;

5. а) $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$; б) $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$; 6. $\sqrt{63{,}4}$.

Вариант 20

1. а) $y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$; б) $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$; в) $y=\dfrac{\arcsin x}{1-2x}$;

г) $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln x}$; д) $y=1+xe^y$;

2. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2-1 \end{cases}$; 3. а) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x-3}}$

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;

5. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 6. $\sqrt[3]{8{,}2}$.