Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА
имени И.М.ГУБКИНА»

Кафедра «Высшая математика»

А.Н.Филиппов, Т.С.Филиппова

«Определенный и несобственный интегралы и их приложения»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению расчетно-графической работы

МОСКВА 2010

Рецензенты:

Профессор кафедры высшей и прикладной математики МГУПП
д.ф.-м.н **Угрозов В.В.**
Доцент кафедры высшей и прикладной математики МГУПП
к.ф.-м.н. **Иванов В.И.**

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания подготовлены в соответствии с новым образовательным стандартом математических дисциплин, в котором расчетно-графическая работа или типовой расчет рекомендованы в качестве основной формы циклического задания для обучения студентов с целью развития навыков самостоятельной работы с новым материалом. Кроме того, данные указания будут полезны студентам альтернативных форм обучения, в том числе овладевающим знаниями по системе дистанционного образования.

Методические указания посвящены освоению техники вычисления определенных и несобственных интегралов и их приложениям. Задачи в каждом варианте подобраны в основном так, что при их решении требуется приложить некоторые усилия при сохранении доступного уровня слаженности. Перед решением каждого варианта студенту желательно дать ответы на теоретические вопросы, что, в конечном счете, приведет к более глубокому и прочному усвоению темы «определенный и несобственный интеграл».

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

(для всех вариантов РГР)

1. Дать определение понятий «определенный интеграл» и «несобственный интеграл».
2. Что такое интегральная сумма, и какими основными свойствами она обладает?
3. В чем заключается геометрический смысл определенного и несобственного интегралов? Что такое криволинейная трапеция?
4. Какой смысл придается определенному интегралу с физической точки зрения?
5. Чему равен определенный интеграл, если его подынтегральная функция равна единице?
6. Как вычислить среднее «интегральное значение» данной непрерывной на отрезке [a,b] функции $f(x)$

7. Можно ли сравнить два определенных интеграла от двух различных функций, заданных на одном и том же отрезке?
8. Можно ли, не вычисляя интеграла, указать числовые границы, в пределах которых находится его значение?
9. Что общего между определенным и неопределенным интегралом для одной и той же функции $f(x)$, и какое различие между ними?
10. Запишите формулу вычисления определенного интеграла методом замены переменной.
11. В чем сущность формулы интегрирования по частям?
12. Напишите определенный интеграл от любой четной и нечетной функции $f(x)$ и вычислите его. Дайте геометрическую интерпретацию результатов вычисления.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

(в каждом отдельном варианте)

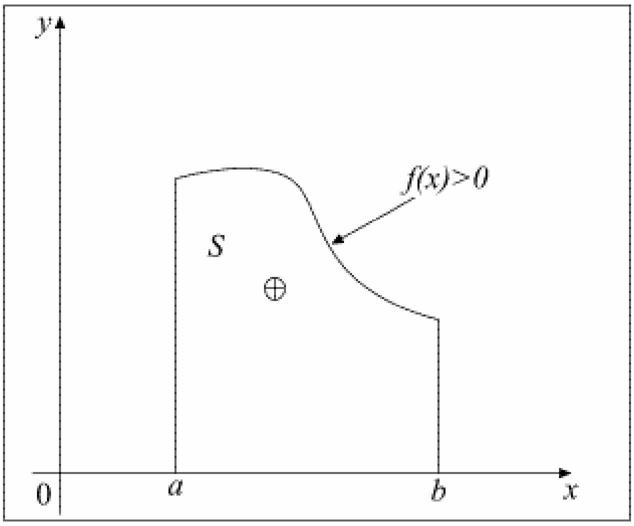
1. Вычислить написанные интегралы, один из которых несобственный.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми в декартовой системе координат (предварительно построить эту фигуру).
3. Построить указанную фигуру в полярной системе координат, определить пределы интегрирования и вычислить ее площадь.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде.
5. Вычислить длины дуг кривых, заданных в декартовой системе координат.
6. Вычислить длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат или в параметрическом виде.
7. Вычислить среднее значение функции или интеграла или оценить интеграл неравенством.
8. Построить плоскую фигуру в декартовой системе координат и затем построить соответствующую фигуру вращения, вычислить ее площадь.
9. Решить прикладную задачу.

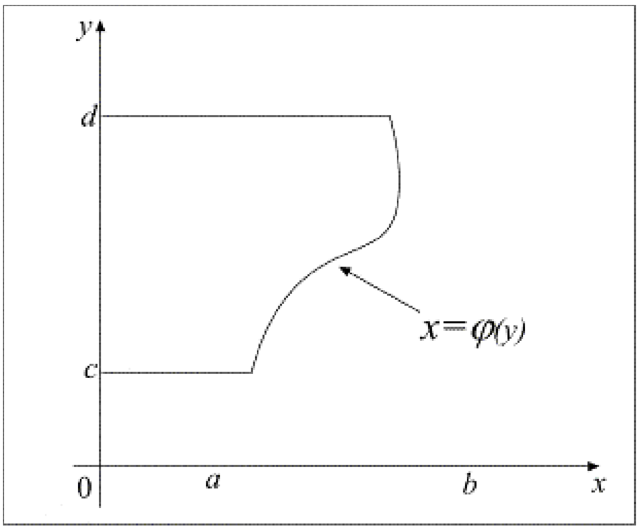
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

Площадь криволинейной трапеции

Если заданная непрерывная функция *f(x)* знакопостоянна, *f(x)* ³*0* или *f(x)£0* на некотором отрезке *[a, b]*, то за основную фигуру, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейная трапеция с основанием *[a, b]* на оси ОХ или с основанием *[c, d]* на оси ОУ.

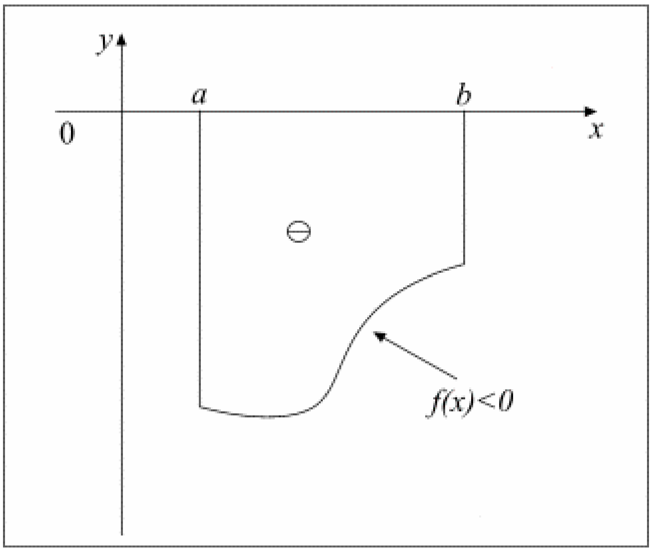
$S = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) \geq 0.$





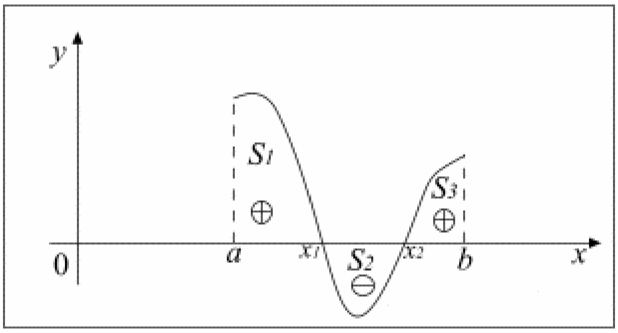
$$S = \int_c^d x dy = \int_c^d j\,(y)dy$$

Если *f(x)£0*, то $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx$.



Если заданная непрерывная функция знакопеременна на отрезке интегрирования *[a, b]*, становясь поочередно то положительной, то отрицательной, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$$



Но $\int_a^{x_1} f(x)dx = S_1$, где S_1 - площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x_1]$;

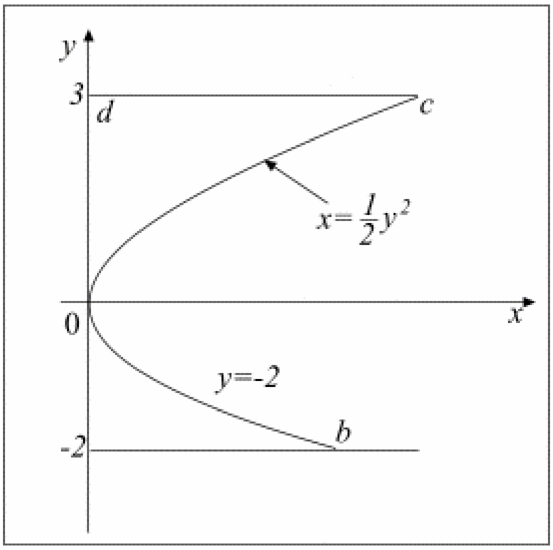
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -S_2$ где S_2 - величина площади криволинейной трапеции с основанием

$[x_1, x_2]$ под осью OX, которая будет отрицательной; аналогично $S_3 = \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$

Рассуждения справедливы и в том случае, когда точек пересечения графика с осью OX будет любое конечное число, большее двух. Поэтому $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$. Таким образом, интеграл по всему отрезку дает алгебраическую разность площадей фигур, расположенных выше и ниже оси OX.

Чтобы вычислить площадь всей геометрической фигуры, представленной на рисунке (на отрезке *[a, b]*), нужно вычислить модуль интеграла по отрезку $[x_1, x_2]$, т. е. $\int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = |-S_2| = S_2$ и $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

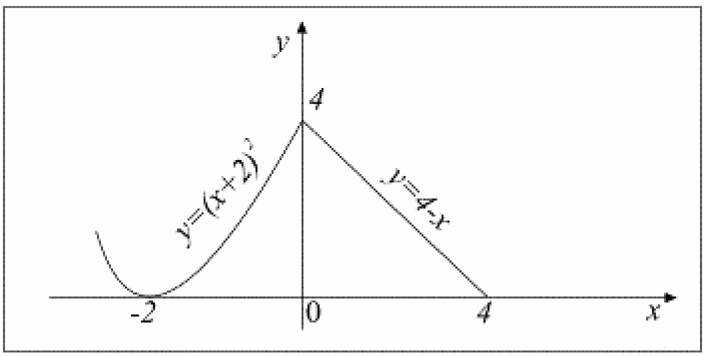


прямыми *y=-2, y=3*, параболой $x=\frac{1}{2}y^2$ и осью ординат.

Решение. $S = \int_{-2}^{3} \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{1}{6}(27-(-8)) = \frac{35}{6}$

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную осью OX и линиями $y=(x+2)^2$, $y=4-x$.

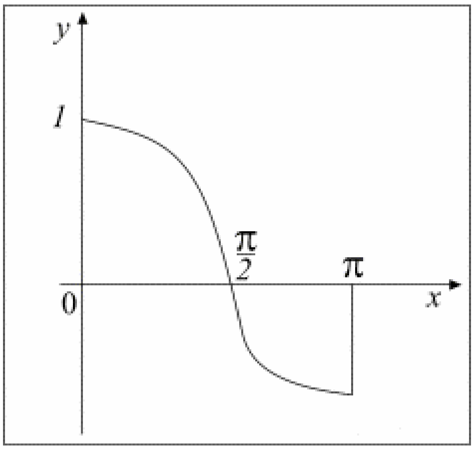
Решение. Сначала построим фигуру, ограниченную параболой и прямой. Из графика ясно, что построенная на отрезке *[-2, 0]* фигура, (криволинейная трапеция) ограничена одной кривой, на отрезке *[0, 4]* – другой, т. е. мы получили другую криволинейную трапецию и поэтому



$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx+\int_{0}^{4}(4-x)dx=10\frac{2}{3}.$$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную косинусоидой *f(x)=***cos***x* на отрезке *[0, p]*

Решение. Рассмотрим знак функции **cos***x* на всем отрезке *[0, p]*. На отрезке *[0,* $\frac{p}{2}$*]* **cos***x³0*, а на отрезке [$\frac{p}{2}$,*p*] - **cos***x£0.* Учитывая это, имеем:



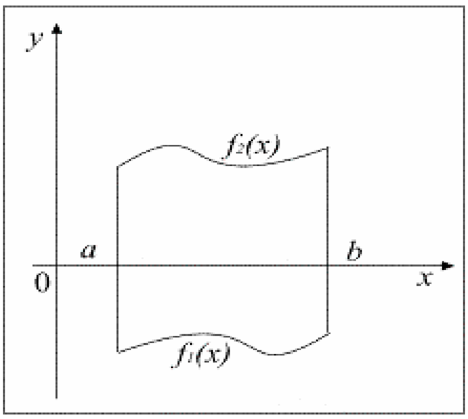
$$S=\int_{0}^{p}\cos x dx=\int_{0}^{\frac{p}{2}}\cos x dx+\left|\int_{\frac{p}{2}}^{p}\cos x dx\right|=\sin x\Big|_{0}^{\frac{p}{2}}+\left|\sin x\Big|_{\frac{p}{2}}^{p}\right|=\sin p/2+\left|\sin p-\sin p/2\right|=$$

$$=1+\left|0-1\right|=2$$

Заметим, что при этом интеграл $\int_{0}^{p}\cos x dx=\int_{0}^{\frac{p}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{p}{2}}^{p}\cos x dx=0$.

Площадь фигуры, ограниченной двумя различными кривыми

Предположим что на отрезке *[a, b]* заданы две непрерывные функции

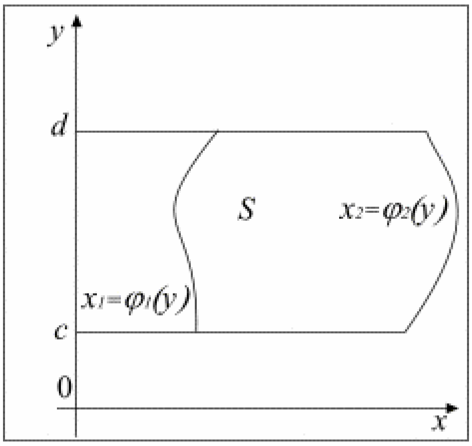


$y_1=f_1(x)$ *и* $y_2=f_2(x)$. Пусть также при всех x из этого отрезка выполняется неравенство $f_1(x)$ £$f_2(x)$. Площадь фигуры ограниченной графиками этих функций и прямыми $x=a$ и $x=b$ определяется по формуле

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx. \qquad (1)$$

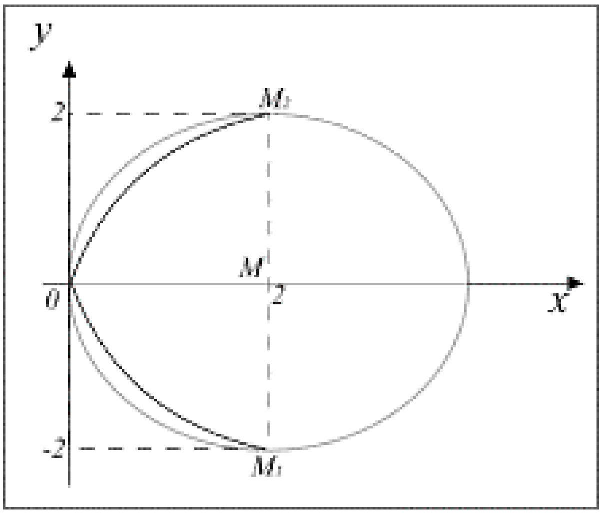
Если же две непрерывные функции относительно y на отрезке $[c, d]$ при всех y из этого отрезка удовлетворяют неравенству $j_1(y) \le j_2(y)$, то площадь фигуры, ограниченной функциями $x_1 = j_1(y)$ *и* $x_2 = j_2(y)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$ вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d [j_2(y)-j_1(y)]dy. \qquad (2)$$



<u>Пример 4.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$ и окружностью $y^2=4x-x^2$

<u>Решение.</u> Сначала схематически изобразим эту площадь. Из рисунка ви-



дим, что заданные кривые ограничивают две различающиеся плоские фигуры (меньшую и большую). Каждая из этих фигур, в свою очередь, состоит из двух симметричных относительно оси OX частей. Поэтому достаточно вычислить площадь верхней части каждой фигуры и затем умножить ее на два. Найдем сначала площадь меньшей фигуры. Преобразуем уравнение окружности и определим координаты ее центра и величину радиуса.

$y^2=4x-x^2=-x^2+4x=-(x^2-4x+4-4)=-\left[(x-2)^2-4\right]=-(x-2)^2+4$; $y^2=-(x-2)^2+4$; $(x-2)^2+y^2=4$

Следовательно, центр окружности находится в точке *M(2, 0)* а ее радиус *R=2*. Найдем точки M_1 и M_2 пересечения обеих линий, решая систему двух уравнений $\begin{cases} y^2=4x-x^2 \\ y^2=2x \end{cases}$. $4x-x^2=2x$; $x^2-2x=0$; $x(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$, $y_1=0$, $y_2=\pm 2$.

O(0, 0); $M_2(2, 2)$; $M_1(2, -2)$.

Найдем уравнение границы OM_2 (части окружности) $|y_2|=\sqrt{4x-x^2}$. Из условия на ординаты точек границы y_2 ³*0* имеем $y_2=\sqrt{4x-x^2}$; по этой же причине уравнение нижней части границы $y_1=\sqrt{2x}$, на отрезке [0, 2].

По формуле (1) находим

$$S=2\int_0^2(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{2x})dx=2\int_0^2\sqrt{4x-x^2}\,dx-2\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{x}\,dx,$$

но $S_{OMM_1}=\int_0^2\sqrt{4x-x^2}\,dx$ - это площадь четверти окружности. Площадь всей окружности равна *pR*^{2}*=4p*. Второй интеграл легко вычисляется

$\int_0^2\sqrt{x}dx=\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Теперь найдем искомую площадь

$$S=2(p-\sqrt{2}\frac{4\sqrt{2}}{3})=2(p-\frac{8}{3}).$$

Теперь, чтобы найти площадь большей фигуры, необходимо из площади круга вычесть площадь меньшей фигуры:

$$S_1=4p-2(p-\frac{8}{3})=2(p+\frac{8}{3}).$$

Проверим значение первого интеграла.

$\int\limits_0^2\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int\limits_0^2\sqrt{(-1)(x^2-4x)}dx=\int\limits_0^2\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$. Обозначим *x-2=2***sin***t;*

*dx=2***cos***tdt,* тогда $\sqrt{4-(x-2)^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2|\cos t|$; при x=2, t=0; при x=0,

t= - $\frac{p}{2}$ (четвертая четверть). Поэтому

$$\int\limits_0^2\sqrt{4-(x-2)^2}dx=-4\int\limits_0^{-\frac{p}{2}}\cos^2 tdt=-4\int\limits_0^{-\frac{p}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=-2\int\limits_0^{-\frac{p}{2}}dt-2\int\limits_0^{-\frac{p}{2}}\cos 2tdt=$$

$$-2\left(t\Big|_0^{-\frac{p}{2}}+\sin 2t\Big|_0^{-\frac{p}{2}}\right)=-2(-\frac{p}{2}-\sin p)=p$$

.

<u>Пример 5.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=-2y^2$ и $x=1-3y^2\ {}^3-2y^2$

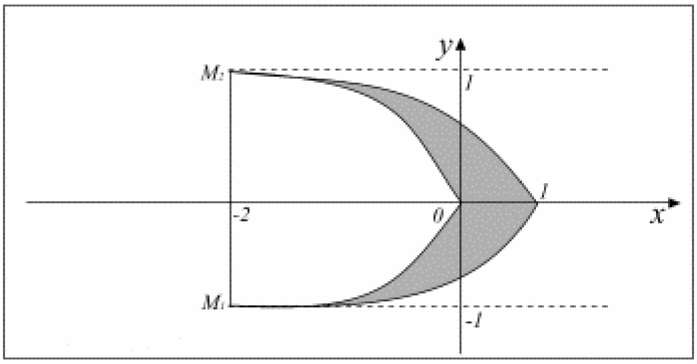
<u>Решение.</u> Второе уравнение запишем так $x-1=-3y^2$, отсюда следует, что *x-1£0* и *x£1;* это означает, что вся фигура (парабола) $x=1-3y^2$ расположена левее точки *x=1;* она симметрична относительно оси ОХ, так как при замене *y* на *(-y)* уравнение не изменяется. Ветви параболы направлены влево; ее вершина находится в точке (1, 0). Определим точки ее пересечения с осью *OY (x=0);* $3y^2=1$, $y_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ветви второй параболы направлены также влево, а ее вершина совпадает с началом координат.

Определим точки пересечения этих кривых из решения системы

$$\begin{cases}x=-2y^2\\ x=1-3y^2\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}-2y^2=1-3y^2\\ y^2=1;\ y_1=1;\ y_2=-1\end{matrix}$$

Одна точка пересечения $M_1(-2,-1)$ вторая – $M_2(-2,1)$.

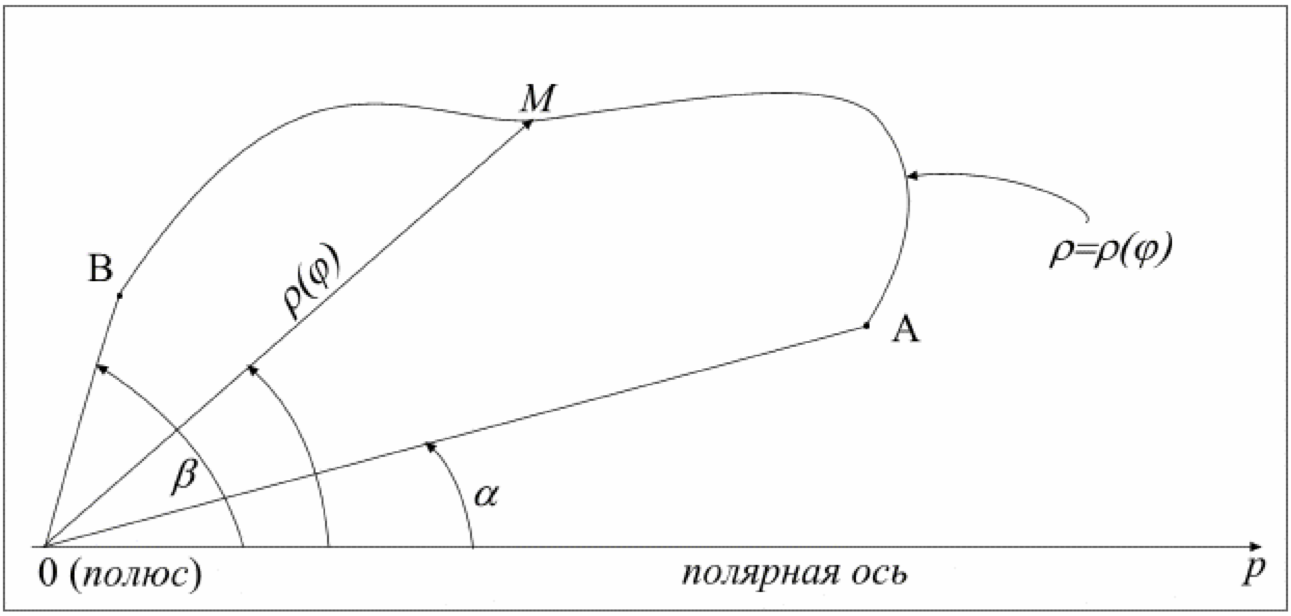
Изобразим эту фигуру на чертеже. Здесь проще вычислить площадь по формуле (2) т. е.



$$S=\int_{-1}^{1}\left[(1-3y^2)-(-2y^2)\right]dy=\int_{-1}^{1}(1-3y^2+2y^2)dy=\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy=(y-\frac{y^3}{3})\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

<u>Площадь в полярной системе координат</u>

В качестве основной фигуры в полярной системе координат, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейный сектор (см. рисунок). Этот сектор ограничен полярными радиусами ***OB*** ($j=b$) и ***OA*** ($j=a$) точек ***B*** и ***A***, а также участком ***AMB*** самой кривой, уравнение которой в полярной системе координат записывается как $r=r(j)$.

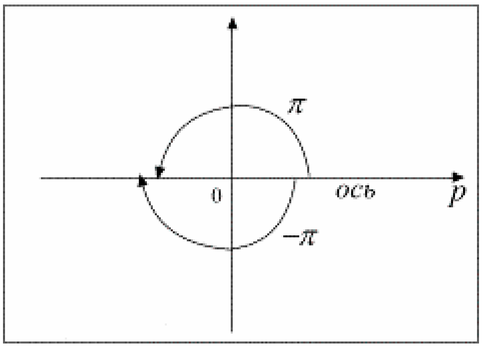


Площадь криволинейного сектора находится по формуле

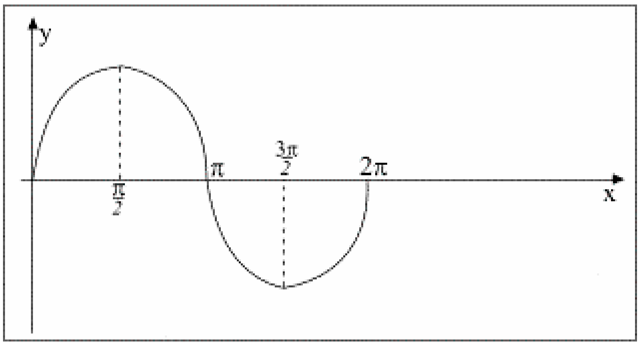
$$S=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}r^2(j)dj\ . \qquad (3)$$

<u>Пример 6.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\sin 2j$

<u>Решение.</u> Сначала построим эту фигуру в полярной системе координат, задавая значения аргумента j полярного угла из интервала $-p < j \le p$, учитывая только те из них, которые дают положительные или равные нулю значения полярного радиуса r . Эти значения j находятся из тригонометрического неравенства $\sin 2j \ge 0\,(r \ge 0)$. Таким образом, вычисляя значения j из системы неравенств $\begin{cases} \sin 2j \ge 0 & (4) \\ -p < j \le p & (5) \end{cases}$, установим и пределы интегрирования по переменной j .



Решим неравенство (4), используя график функции *y*=**sin**x на одном периоде Т=2p .



Из графика ясно, что если $0 \le 2j \le p$ (т.е. $0 \le j \le \frac{p}{2}$ - первая четверть полярной системы координат), то первая полуволна синусоиды опирается только на неотрицательные ординаты; в силу периодичности функции все такие полуволны определяются из неравенства

$$0 + 2kp \le 2j \le p + 2kp, \quad pk \le j \le \frac{p}{2} + pk,\ k \hat{I} Z. \qquad (*)$$

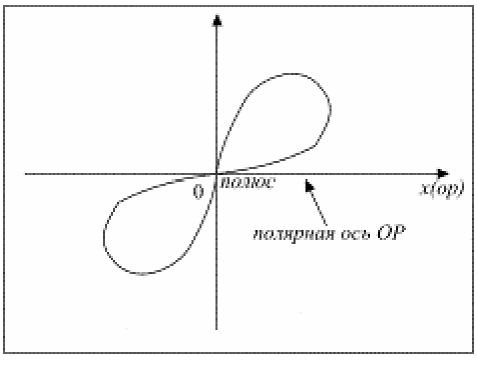
Если же $\frac{p}{2} < j < p$ (вторая четверть), то получаем противоречие неравенству (4) системы.

Вторая полуволна получится из общего неравенства (*) при k=1 ($p < j \le \frac{3p}{2}$ - третья четверть). При этом получаем противоречие уже неравенству (5) системы. Поэтому другие положительные значения полярного угла рассматривать нет смысла. Остается проверить отрицательные значения, например, k=-1. Тогда, $-p \le j \le \frac{p}{2} - p$, $и$ $-p \le j \le -\frac{p}{2}$. Эти значения j дадут положительные значения полярного радиуса тоже в третьей четверти, что не противоречит неравенству (5). Отсюда ясно, что другие отрицательные значения k<-1 ничего нового не дадут, так как выведут значения j за пределы, ограниченные неравенствами (4) и (5).

Итак, точки нашей кривой в полярной системе координат будут располагаться только в углах, ограниченных неравенствами: $0 \le j \le \frac{p}{2}$ и $-p \le j \le -\frac{p}{2}$. Поэтому для построения «по точкам» кривой при составлении числовой таблицы переменных координат r и j, значения j надо брать из последних неравенств. Так как функция $\mathbf{sin}2j$ нечетная, достаточно построить ветвь кривой в 1-ой четверти значений j из неравенства $0 \le j \le \frac{p}{2}$.

j	0	π/6	π/4	π/3	π/2
$\mathbf{2}j$	0	π/3	π/2	2π/3	π
r	0	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0

Из полюса проводим четыре луча под углами 30°, 45°, 60° и 90° по отношению



к полярной оси и в выбранном масштабе откладываем значения r из таблицы. Полученные точки соединяем плавной кривой. Вторую ветвь кривой строим путем отражения относительно полюса в силу симметрии. Тогда площадь фигуры в соответствии с формулой (3) равна:

$$S = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^2 2j\,dj = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{p}{2}}(1-\cos 4j)d(4j) = \frac{1}{8}(4j - \sin 4j)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{8}(2p - \sin 2p) = \frac{p}{4}\ \textit{кв.ед.}$$

Отметим, что после такого исследования пределы интегрирования a *и* b в данном примере определяются безо всяких трудностей.

Таким образом, для вычисления площади в полярной системе координат рекомендуется поступать так:

1. Составить систему неравенств типа (4) и (5), решить первое неравенство, используя чертежи.
2. Выяснить, в каких четвертях по углу j, расположена искомая кривая, и построить ее по точкам, используя, где возможно, свойства симметрии. Если окажется, что форма кривой не совсем ясно проявилась или она искажена, то количество точек расчета нужно увеличить и повторить построение, строго соблюдая выбранный масштаб и процесс построения (откладывания) полярных углов j и полярных радиусов r.
3. Убедиться, что построенная фигура представляет собой криволинейный сектор, и определить пределы интегрирования a *и* b. Затем вычислить площадь фигуры по формуле (3). Если же построенная фигура не оказалась криволинейным сектором, то нужно с помощью полярных радиусов разбить ее на части, каждая из которых уже будет криволинейным сектором, выбрать для каждого сектора пределы интегрирования и вычислить их площадь, суммируя результаты вычислений.

Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде

Если кривая $y = f(x)$ задана двумя уравнениями так, что

$$\begin{cases} x = j\,(t) \\ y = y\,(t) \\ a \le t \le b \end{cases},$$

где $j\,(t)$ и $y\,(t)$ - непрерывные функции параметра t; a и b - известные числа; или их легко найти после построения фигуры.

Площадь фигуры $S = \int_a^b y\,(t) j\,'(t)dt$ (6)

или $S = \frac{1}{2}\int_a^b (y'_t * x - x'_t * y)dt$ (7)

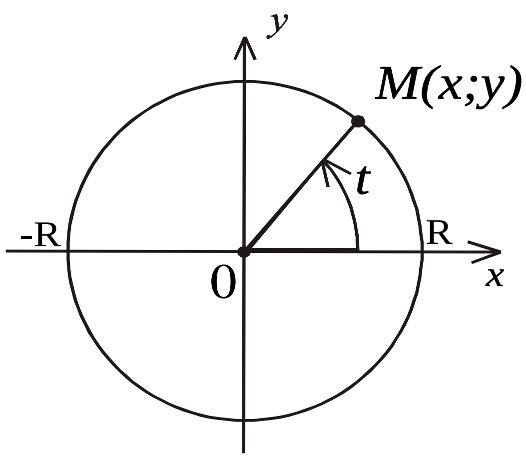
Применение формулы (7) часто приводит к более простым выкладкам.

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = j\,(t) = R\cos t \\ y = y\,(t) = R\sin t \end{cases}$$

Решение. Выясним, что_эта за линия, определив отношения $(x/R) = \cos t, (y/R) = \sin t$. Возводя их обе части в квадрат и складывая, получим $x^2 + y^2 = R^2$.

Таким образом, данные параметрические уравнения определяют окружность с центром в начале координат радиусом R; параметр t - угол текущей точки окружности, отсчитываемый от оси OX. Из чертежа видно, что когда, x возрастая, изменяется от значения $x = -R$ до $x = R$, точка M пробегает всю верхнюю часть окружности и параметр t изменяется от значения $t = p$ до $t = 0$. Поэтому



$S = 2\int_p^0 R\sin t(-R\sin t)dt =$

$-2R^2\int_p^0 \sin^2 t dt =$

$$=2R^2\int_0^{p}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=R^2\int_0^{p}dt-2\frac{R^2}{4}\int_0^{p}\cos 2td(2t)=pR^2$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \\ y=5\sqrt{2}\sin t \\ y=5(y\geq 5) \end{cases}$$

Решение. Определим вид линии: $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{5\sqrt{2}}\right)^2=1,$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{50}=1$$

Это эллипс, вытянутый вдоль оси OY. От начала координат вдоль оси OX отложим отрезки $2\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{2}$, а вдоль оси OY $5\sqrt{2}$ и $-5\sqrt{2}$. Получим прямоугольник размером $2\sqrt{2}\,\text{x}\,5\sqrt{2}$, внутри которого расположим эллипс. Проводя прямую $y=5$, отсекаем от него часть, расположенную выше этой прямой:

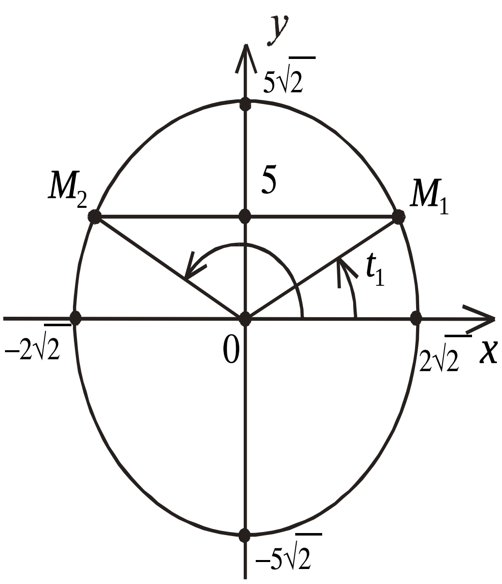
$\begin{cases} y=5 \\ y=5\sqrt{2}\sin t \end{cases}\Rightarrow \sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}, t_1=\frac{p}{4}$ и, в силу симметрии, $t_2=p-\frac{p}{4}=\frac{3p}{4}$.

Следовательно, рассуждая по аналогии с предыдущим примером, имеем

$a=\frac{3p}{4}; b=\frac{p}{4}$. Кроме того, ординаты точек отсеченной части эллипса определяются уравнением

$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \\ y+5=5\sqrt{2}\sin t\Rightarrow y=5\sqrt{2}\sin t-5 \end{cases}$, которое

подставляется в формулу (6).



$$S=-\int_{\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}}(5\sqrt{2}\sin t-5)2\sqrt{2}\sin tdt=$$

$$= -20\int\limits_{\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \sin^2 t dt + 10\sqrt{2}\int\limits_{\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \sin t = = -20\int\limits_{\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt - 10\sqrt{2}\cos t\Big|_{\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} =$$

$$= -20 * \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\frac{3p}{4}}^{\frac{p}{4}} - 10\sqrt{2}(\cos\frac{p}{4} - \cos\frac{3p}{4}) =$$

$$= -10(-\frac{p}{2} - 1) - 20 = 5(p + 2) - 20 = 5(p - 10);$$

<u>Длина дуги кривой в декартовой системе координат</u>

Если уравнение кривой задано в виде функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, и она имеет непрерывную производную на $(a;b)$, то длина дуги этой кривой, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле

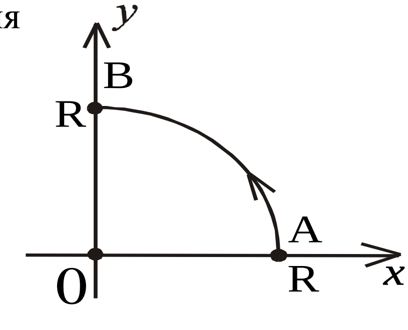
$$\mathbf{l} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \qquad (8)$$

Если же кривая определяется уравнением $x = j(y)$ на отрезке $[c;d]$ относительно оси OY, и функция $j(y)$ имеет непрерывную производную в промежутке $(c;d)$, то

$$\mathbf{l} = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (j'(y))^2} dy = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy \qquad (9)$$

<u>**Пример 9.**</u> Вычислить длину дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$; R – радиус окружности.

<u>**Решение.**</u> Вычислим производную от выражения $x^2 - y^2 - R^2 = 0$, как от неявной функции



$(x^2 + y^2 - R^2)_x' = 0 \qquad 2x + 2y * y_x' = 0.$

$$y' = -\frac{x}{y}; \; (y_x')^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{R^2 - x^2};$$

$$1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2};$$

По формуле (8) вычислим длину дуги АВ – четверти окружности.

$$\frac{\mathbf{l}}{4}=\int_0^R \frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R*\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=\frac{pR}{2}$$

$\mathbf{l}=2pR$. Отметим, что если бы мы нашли $y^2=R^2-x^2$ и затем $|y|=\sqrt{R^2-x^2}$ и вычислили производную y_x', то затратили больше усилий даже в этой простой задаче.

Пример 10. Вычислить длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ заключенную между точками с ординатами $y=1$ и $y=2$.

Решение. В этой задаче чертеж делать необязательно и за независимую переменную удобнее выбрать y, тогда

$$x_y'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y};\ \sqrt{1+(x_y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}=\left|\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right|,$$ но по условию $y>0$,

$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}>0$, $\left|\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right|=\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)$, поэтому $\sqrt{1+(x_y')^2}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}$.

Итак: $\mathbf{l}=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

Длина дуги кривой, заданной в параметрическом виде

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $(y=y\,(t))$ и $(x=j\,(t))$; причем производные $j\,'(t)$ и $y\,'(t)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то длина дуги вычисляется по формуле

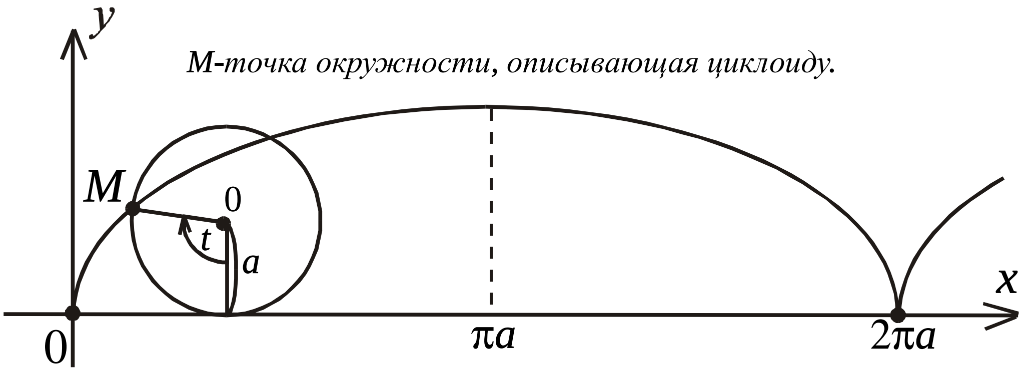
$$\mathbf{l}=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (10)$$

Здесь a и b - значения параметра t, соответствующие концам рассматриваемое дуги, так, что $a<b$.

Пример 11. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Решение. Пусть в начальном положении круг радиуса $R = a$ касается оси OX в начале координат так, что его диаметр и центр совпадают с осью OY. Из этого положения он начинает катиться без скольжения по неподвижной прямой – оси OX. Совершив при таком движении полный оборот вокруг своей оси (центра), точка M опишет некоторую кривую, которая и называется аркой циклоиды. Тогда x пробегает отрезок $2\pi a$ равный всей длине окружности, так как за один оборот точка M займет исходное положение на оси OX. При дальнейшем движении круга получится вся циклоида.



M-точка окружности, описывающая циклоиду.

Величина центрального угла t между диаметрами OM изменится от значения $t = 0$ (когда эти диаметры совпадали) до значения $t = 2\pi$ (точка M окружности совершила полный оборот). Длина одной арки циклоиды находится при этом следующим образом.

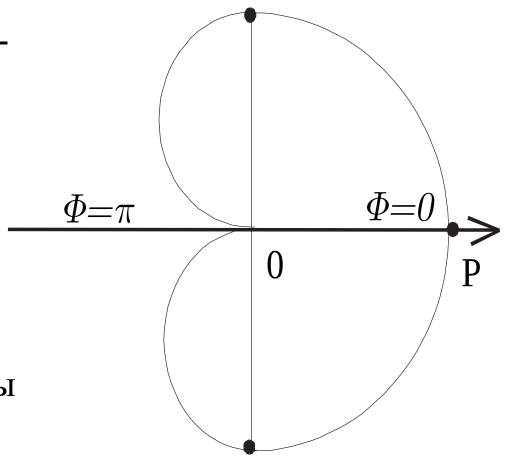
Вычислим: $x_t' = a(1 - \cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2}$, $y_t' = a\sin t = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$;

$(x_t')^2 + (y_t')^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$. Но, так как, $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, $0 < t < 2\pi$, а

$\sin\frac{t}{2}$ в 1-ой и 2-ой четвертях положителен, т.е. $\sin\frac{t}{2} \ge 0$ и $\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$, поэтому $\mathbf{l} = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a$

Длина дуги кривой в полярной системе координат

В случае задания линии уравнением $r = r(j)$ в полярной системе координат (рисунок на странице 13), длина участка ***AMB*** кривой, ограниченного полярными радиусами ***OB*** ($j = b$) и ***OA*** ($j = a$) точек ***B*** и ***A*** находится по формуле:



$$\mathbf{l} = \int_a^b \sqrt{r^2(j) + (r'(j))^2}\, dj\,. \qquad (11)$$

<u>Пример 12.</u> Вычислить длину кардиоиды

$r = a(1 + \cos j)$.

<u>Решение.</u> Построим кривую, как показано на рисунке. Поскольку она симметрична относительно полярной оси, то можно найти лишь длину верхней половины кривой от точки, лежащей на луче $j = 0$ до точки на луче $j = p$ и затем удвоить результат. Так как $r' = -a\sin j$ и $0 \le j \le p$, то

$$\sqrt{r^2(j) + (r'(j))^2} = \sqrt{a^2(1+\cos j)^2 + a^2\sin^2 j} =$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos j)} == a\sqrt{4\cos^2\frac{j}{2}} = 2a\cos\frac{j}{2}.$$

Следовательно, длина кардиоиды равна $\mathbf{l} = 2\int_0^p 2a\cos\frac{j}{2}\,dj = 8a\sin\frac{j}{2}\Big|_0^p = 8a.$

Среднее интегральное значение функции

Средним значением непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (12)$$

<u>Пример 13.</u> Определить среднее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. $f_{cp} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$.

Оценка интеграла

На практике часто не требуется знать точное значение интеграла, а нужно знать лишь числа, между которыми находится его величина. Для этой цели используется свойство оценки значения определенного интеграла:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \qquad (13)$$

где m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а M – наибольшее её значение на этом отрезке; $(b-a)$ - длина отрезка.

Пример 14. Оценить интеграл $\int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$, не вычисляя его.

Решение. Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x) = \sqrt{3+x^3}$ на отрезке $[1;3]$. Вычислим её производную, получим, что

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}} > 0 \text{ на } [1;3].$$

Из неравенства следует, что сама функция на данном отрезке монотонно возрастает. Следовательно, свое наибольшее и наименьшее значение она принимает на концах отрезка $[1;3]$, т.е. $m = f(1) = \sqrt{4} = 2$; $M = f(3) = \sqrt{30}$

Поэтому, $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \le 2\sqrt{30}$.

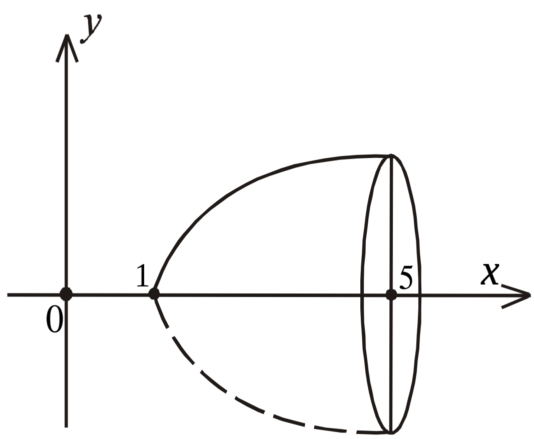
Объем тела вращения

Объем тела вращения находится по формулам:

$$V_x = p\int_a^b y^2 dx = p\int_a^b (f(x))^2 dx, \qquad (14)$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OX и

$$V_y = p\int_c^d x^2(y)dy = p\int_c^d j^{\,2}(y)dy\,, \qquad (15)$$



если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OY.

Пример 15. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = f(x) = \sqrt{x-1}, x = 5; y = 0$.

Решение. Построим сначала фигуру, исходя из условия задачи. Из чертежа ясно, что это криволинейный треугольник, поэтому

$$V_x = p\int_1^5 y^2 dx = p\int_1^5 (x-1)dx = p\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^5 =$$

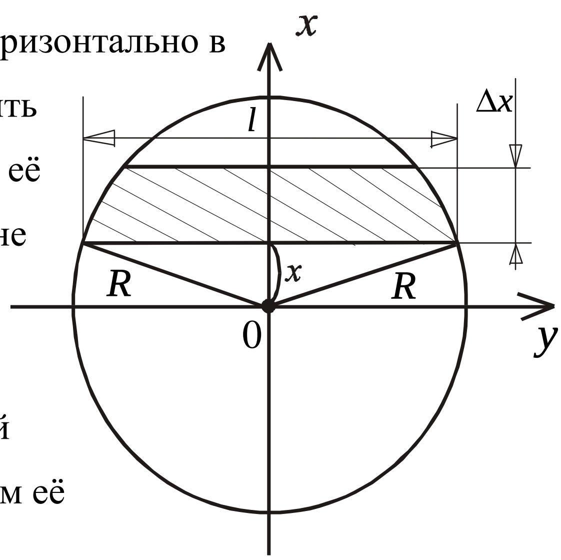
$$= p\left(\frac{25}{2} - 5\right) - p\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 8p$$

Приложения определенного интеграла в физике

Задача 1. Скорость движения точки $u = 0{,}5t^3$. Найти путь s, пройденный точкой за время $t = 8$ сек после начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки?

Решение. Так как $\frac{ds}{dt} = u(t)$ или $\frac{ds}{dt} = 0{,}5t^3 \Rightarrow ds = 0{,}5t^3 dt$ причем $0 \le t \le 8$. Поэтому $s = \int_0^8 0{,}5t^3 dt = 0{,}5\frac{t^4}{4}\Big|_0^8 = 512\,м;\ u_{ср} = \frac{s}{t} = \frac{512}{8} = 64\,м/с$.

Задача 2. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, может закрываться заслонкой. Определить давление, испытываемое этой заслонкой, если её диаметр D=60 см, а центр находится на глубине 15 м под водой.



Решение. Заслонка представляет собой круг. Выберем вертикальную полоску высотой Δx на расстоянии x от центра круга, обозначим её длину буквой $\mathbf{l}$. Тогда площадь этой полоски равна

$$\Delta s = \mathbf{l} * \Delta x,$$

считая приближенно полоску прямоугольной. Это предположение тем точнее, чем меньше высота полоски Δx. По теореме Пифагора имеем: $x^2 + \left(\frac{\mathbf{l}}{2}\right)^2 = R^2$.

Длина хорды, отстоящей на расстоянии x от центра круга равна:

$\mathbf{l} = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{30^2 - x^2}$. Полоска такой длины находится на глубине $(1500 - x)$ ($x > 0$ для верхней части круга, $x < 0$ для нижней части круга). Поэтому элементарная площадь полоски: $\Delta s = 2\sqrt{30^2 - x^2} * \Delta x$.

Элементарное давление воды на эту полоску на глубине $(1500 - x)$ равно

$$\Delta p = rg * (1500 - x) * \Delta s = rg * (1500 - x) * 2\sqrt{30^2 - x^2} * \Delta x$$

Сила давления на весь круг

$$P = rg\int_{-30}^{+30}(1500 - x) * 2\sqrt{30^2 - x^2}\,dx = 1350000prg \approx 4{,}16 * 10^{12}\,\frac{г}{см\,сек^2} = 41{,}6атм.$$

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{1}\frac{xdx}{\sqrt[3]{2 - x^2}}$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1 + \sqrt{x}}$; $\int\limits_{0}^{1}xe^{-x}dx$; $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = e^{2x}$; $y = \log_2 x$; $x = 1$; $x = 2$

3.Найти площадь фигуры в полярной системе координат $r = a\sin 2j$; $a = const$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $y = 2$ $(y \geq 2)$.

5.Найти длину кривой $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

6.Найти длину дуги кривой в полярной системе координат $r = 6(1 + \sin j)$, $-\frac{p}{2} \leq j \leq 0$.

7.Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \sqrt{2+\sin x}\,dx$.

8.Вычислить объем тела, получающегося при вращении параболы $y^2 = 4x$ вокруг своей оси, ограниченного перпендикулярной к ней плоскостью и отстоящей от вершины параболы на расстоянии, равном единице.

9.Скорость движения точки $u = e^{-0,01t}$ $м/с$. Вычислить путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

<u>Вариант 2</u>

1.$\int\limits_{2}^{8} \sqrt{x-1}\,dx$; $\int\limits_{4}^{0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; $\int\limits_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$; $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x+1$; $x - y - 1 = 0$.

3.Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярной системе координат $r = \cos j$; $r = 2\cos j$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в параметрическом виде $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $y = 4$ $(y \ge 4)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln(x^2-1)$, $2 \le x \le 3$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases},\quad 0 \le t \le \frac{p}{6}.$$

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$.

8.Вычислить объем тела вращения вокруг оси X криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, прямыми $x = 2$, $x = 6$ и осью OX.

9.Тело движется со скоростью $u = e^{-0{,}01t}\ ^{м}/_{c}$. Определить закон движения тела, если за 5 секунд оно прошло 105 м.

<u>Вариант 3</u>

1. $\int\limits_{1}^{3} x\sqrt{x^2+7}dx$; $\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} x\cos xdx$; $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y = x^2 + 4x - 3$ и касательной к ней в точках (0;-3) и (3;0).

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярной системе координат $r = 2\cos j$; $r = 4\cos j$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой, заданной в параметрическом виде $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, (в первом квадрате $\frac{p}{2} \le t \le 0$).

5.Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le p/4$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$,

$0 \le t \le p$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{\sin x}{x}dx$.

8.Вычислить объем тела, полученного вращением около оси ОХ, плоской фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямой $2y - 3x - 5 = 0$.

9.Скорость движения точки изменяется по закону $u(t) = (3t^2 + 2t + 1)\ ^{м}/_{c}$. Вычислить путь, пройденный точкой за 10 секунд от начала движения.

<u>Вариант 4</u>

1. $\int\limits_{0}^{-\frac{p}{9}} \sin^2 3xdx$; $\int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt{2+x}}{x}dx$; $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

3.Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля в полярной системе координат $r = 2a(2 + \cos j\,)$, *a=const.*

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды
$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

5.Найти длину дуги кривой $y = e^x + 6$, $\quad (\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15})$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$, $\qquad 0 \le t \le \dfrac{p}{6}$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\qquad \int\limits_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 4dx}$.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 1$ и $y^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)x$.

9.Мгновенная скорость движения определяется в зависимости от времени формулой $u = \sqrt{1+t}\ ^{м}/_{c}$. Определить среднюю скорость движения за 10 секунд от начала движения.

Вариант 5

1.$\int\limits_2^3 \dfrac{xdx}{(2+x)(x^2+3)}$; $\qquad \int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$; $\qquad \int\limits_0^3 \ln(x+3)dx$; $\qquad \int\limits_0^{\infty} x\sin xdx$.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, осью OX и прямой $x = 6$.

3.Найти площадь, ограниченной кривой $r = 4\cos j$ в полярной системе координат.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $y = 4 \ \ (y \ge 4)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x + 2$, $\qquad 0 \le x \le \frac{p}{6}$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + \sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \qquad 0 \le t \le p .$$

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\displaystyle\int_0^{2p} \frac{dx}{10 + 2\cos x}$.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной осями координат и параболой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. Предварительно найти отрезок интегрирования путем вычисления точек пересечения кривой с осями координат.

9.Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении вдоль прямой. Первое тело движется со скоростью $u(t) = (6t^2 + 2t)\,{}^{м}\!/_{c}$, второе – со скоростью $u(t) = (4t + 5)\,{}^{м}\!/_{c}$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 сек?

<u>Вариант 6</u>

1. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{x^3 - 1}dx$; $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx$; $\displaystyle\int_0^3 x arctg x dx$; $\qquad \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2 + \arcsin\frac{1}{x}}{1 + \sqrt{x}}dx$

2.Вычислить площадь сегмента, отсекаемого от кривой $y^2 = x^3 - x^2$ хордой $x = 2$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 1 + \cos j$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ и $y = 6$ $(y \ge 6)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$, $p/6 \le x \le p/3$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t). \\ p \le t \le 2p \end{cases}$$

7.Найти средние значение функции $f(x) = \cos^2 x$ на отрезке $0 \le x \le p$.

8.Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = b, y = -b$.

9.Скорость движения точки $u(t) = (12t^2 - 3t)\, {}^{м}\!/\!{}_{с}$. Вычислить путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки. Найти закон ускорения движения точки в зависимости от времени t .

Вариант 7

1. $\int\limits_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$; $\int\limits_0^{\frac{p}{6}} x \sin^2 x dx$; $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$; $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $7x^2 - 9y + 9 = 0$ и $5x^2 - 9y + 27 = 0$.

3.Найти площадь фигуры в полярной системе координат $r = 2\sin 4j$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ и $y = 4 \quad (y \ge 4)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $\quad 0 \le x \le \frac{15}{16}$.

6.Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $\quad \frac{p}{2} \le t \le \frac{2p}{3}$.

7.Вычислить среднее значение функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ на отрезке $0 \le x \le 1$.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = 2, x = 0$.

9.Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку с основанием b и высотой h, погруженную в воду так, что её вершина лежит на поверхности воды. Произвести расчет для $h = 9$ и $b = 4$ м, удельный вес жидкости g .

Вариант 8

1. $\int\limits_{4}^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$; $\quad \int\limits_{0}^{2p} \sin^4 x dx$; $\quad \int\limits_{0}^{2} e^{2x} x dx$; $\quad \int\limits_{1}^{2} \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$

2.Найти площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке М (3;5) и осью ординат.

3.Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a(1+\cos j)$ и лежащей вне кривой $r = 3a\cos j$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $\quad y = 2 \ (y \geq 2)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln\sqrt{x}$, $\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{15}$.

6.Найти длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \leq t \leq p$.

7.Найти среднюю температуру стержня длины $\mathbf{l} = 2\sqrt{2}$, если распределение температуры вдоль стержня имеет вид $\mathrm{T}(x) = x^2 \sin 5x$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

8.Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = 2, x = 0$ вокруг оси OY.

9.Вычислить величину давления на полукруг радиуса R, вертикально погруженный в жидкость, если его диаметр лежит на свободной поверхности жидкости. Принять удельный вес жидкости равным g .

Вариант 9

1. $\int\limits_{-5}^{4} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+5}}$; $\quad \int\limits_{0}^{2p} \frac{dx}{4+\cos^2 t}$; $\quad \int\limits_{1}^{2} x\, arcctg \frac{x}{2} dx$; $\quad \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$

2.Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x^2$, $y = x^{\frac{2}{9}}$ и $y = 4$.

3.Найти площадь фигуры $r = \frac{1}{2} + \cos j$ в полярной системе координат.

4.Найти площадь, ограниченную линиями $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ и $y = 5$ $(y \geq 5)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x + 2$, $\quad 0 \leq x \leq \frac{p}{6}$.

6.Найти длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t) \\ y = 2{,}5(1 - \cos t) \end{cases}$, $\frac{p}{2} \leq t \leq p$.

Оценить интеграл $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$, пользуясь теоремой о среднем значении.

8.Вычислить объем тела, полученный от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \arcsin x$ с основанием $[0;1]$ вокруг оси OX.

9.Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли со скоростью $u(t) = (39{,}2 - 9{,}8t)\,{}^{м}\!/_{c}$. Найти наибольшую высоту подъема тела.

<u>Вариант 10</u>

1. $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{2 - x^2}\,dx$, $\int\limits_0^{2p} \frac{dx}{2 - \sin x}$, $\int\limits_0^{p/3} x \cdot arctg(x)dx$, $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = \sqrt{4 - x^2}$ и осью OX.

3. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линиями, предварительно построив эти линии в полярной системе координат:
$r = 3 + \cos 4j$, $r = 2 - \cos 4j$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $\quad y = 4$ $(y \geq 4)$.

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln\frac{5}{2x}$, $\left(\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}\right)$.

6. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2p$.

7. Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, используя теорему о среднем значении.

8. Построить линию $y^2=x(x-3)$. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс трапеции, лежащей над осью ОХ и ограниченной этой линией.

9. Два тела движутся по прямой из одной и той же точки. Первое тело движется со скоростью v$(t)=(3t^2-6t)$ м/с, второе - со скоростью v$(t)=(10t+20)$ *м/с*. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?

Вариант 11

1. $\int_2^{10} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{2x^2-1}}$, $\int_0^{p/2} \frac{dx}{2+\cos x}$, $\int_0^1 \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

2. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2+y^2=8$ разделен параболой $y^2=2x$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r = aj$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2p .$$

5. Вычислить длину дуги цепной линии, заданной уравнением

$y = 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)$ от точки $x=0$ до точки $x=4$.

6. Найти длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{p}{2}$.

7. Вычислить среднее значение функции y=**cos**(2x) на отрезке [0;π/2].

8. Вычислить объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $5x - y - 4 = 0$, $x = 0$ вокруг оси ОУ.

9. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического котла с радиусом основания R=10 м.

Вариант 12

1. $\int\limits_0^{p/4} e^{\cos 3x}\sin 3x dx,\ \int\limits_5^8 \frac{3x-4}{x^2-4}dx,\ \int\limits_p^{p/2} x\sin 2x dx,\ \int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-4)^3}}.$

2. Вычислить площадь каждой из фигур, ограниченных окружностью

$x^2+y^2+6x+2y+8=0$ и параболой $y=x^2+6x+10$.

3. Вычислить общую часть площади, заключенную между линиями $r=2$ и $r=2(1+\cos j)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$, и *y=2 (y³2).*

5. Найти длину дуги кривой y=x²/4-1/2lnx (1≤x≤2).

6. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$, $p/2\le t\le 2p/3$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0,$ вокруг оси OX.

8. Вычислить среднее значение функции $f(x)=10+2\sin^2 x+3\cos^2 x$ на отрезке [0,2π].

9. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания равен R, а глубина котла равна H. Котел наполнен жидкостью с удельным весом γ. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из котла.

Вариант 13

1. Вычислить $\int\limits_1^{10}\sqrt{x-1}dx,\ \int\limits_0^1 (x-3)e^{-x}dx,\ \int\limits_0^1\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+5}}dx,\ \int\limits_{-1}^1\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=x^2-6x+10,\ \ y=6x-x^2$.

3. Найти площадь, ограниченную кривой $r=\sin 3j$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

5. Вычислить длину дуги кардиоиды *r=2(1-*cos*j).*

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$y = \ln\cos\ x + 2,\ (0 \le x \le p\ /6).$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX одного из криволинейных треугольников, образованных линиями

$y = 0,\ y = \sin x,\ y = \cos x.$

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^p \sqrt{2 - \cos x}dx$.

8. Материальная точка движется со скоростью $u(t) = t\Big/\sqrt{2 + 5t^2}$ м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 10с.

Вариант 14

1. $\int\limits_2^0 x\sqrt{4 - x^2}dx,\ \int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1 + x}},\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},\ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

   $y = x^2, y = 0{,}5x^2, y = 2x.$

3. Вычислить площадь, ограниченную линией $r = a\cos 2j$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}.$

5. Вычислить длину дуги $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le 15/16.$

6. Определить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases},$ *0£ t £ 3p/2.*

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^p \frac{\sin x}{x}dx.$

8. Найти объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y=x^2$.

9. Материальная точка движется со скоростью $u(t)=t\sqrt{4+t^2}$ м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 20с.

<u>**Вариант 15**</u>

1. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx,\ \int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}},\ \int\limits_{2}^{3}x\sqrt{x^2-4}dx,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^3+1}{x^4}dx$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$xy=20,\ x^2+y^2=41.$

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\frac{1}{2}+\cos j$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t),\ y=6,(y\geq 6). \\ 0\leq x\leq 8p \end{cases}$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=1-\ln(x^2-1),\ 3\leq x\leq 4.$

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=2.5(t-\sin t) \\ y=2.5(1-\cos t) \end{cases},\ \frac{p}{2}\leq t\leq p$.

7.Оценить интеграл $\int_0^1\sqrt[3]{4-3x^3}dx$, не вычисляя его.

8.Вычислить объем тела вращения, возникающего при вращении фигуры

$y=2x-x^2,\ y=-x+2, x=0$ вокруг оси ОХ.

9.Цилиндр диаметром 1 м и длиной 3 м заполнен паром под давлением 10кГ/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в 3 раза, считая, что температура пара остается постоянной?

Вариант 16

1. $\int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx,\ \int\limits_2^3 \frac{x^2dx}{(2+x)(x^2-3)},\ \int\limits_{\frac{p}{20}}^{\frac{p}{2}} x\cos x dx,\ \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2+2x}dx.$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=1+\sqrt{2}\cos j$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases},\ y=3,\ (0<x<4p,\ y\geq 3).$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\mathrm{ch}\,x+3,\ 0\leq x\leq 1.$

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t) \\ y=4(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}\ 0\leq t\leq p$.

7.Оценить интеграл $\int\limits_0^{5/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$, не вычисляя его.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2,\ x=0,\ x=\sqrt{y+1},\ x=1$ вокруг оси OX.

9.Вычислить среднюю температуру стержня длины L=2, если распределение температуры вдоль стержня подчиняется закону $T(x)=x^2\cos 4x,\ -1\leq x\leq 1.$

Вариант 17

1. $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx,\ \int\limits_1^2 \frac{2xdx}{(2+x)(x+3)},\ \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos x}{2+\cos x}dx,\ \int\limits_2^6 \frac{1}{(x-2)^2}dx.$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=1+\sqrt{2}\sin j$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \end{cases},\ y=3(y\geq 3)$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=10\cos^3 t \\ y=10\sin^3 t \end{cases},\ 0\le t\le \frac{p}{2}$.

7.Доказать, что $\frac{p}{6}<\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{p}{4\sqrt{2}}$.

8.Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1$.

9.Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания R, высота конуса H и удельный вес материала стержня g .

<u>Примечание:</u> Относительное удлинение e стержня пропорционально напряжению s в соответствующем поперечном сечении $e=\frac{s}{E}$, где E-модуль Юнга.

<u>Вариант 18</u>

1. $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx,\ \int_0^1 \frac{xdx}{(2+x)(9-x^2)},\ \int_0^{\frac{p}{2}} -\frac{\sin x}{5+3\sin x}dx,\ \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+1}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$x=4-(y-1)^2,\ x=y^2-4y+3$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$r=\cos j,\ r=\sin j,\ 0\le j\le p/2$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \\ y=5\sqrt{2}\sin t \end{cases},\ y=5,(y\ge 5)$.

5.Вычислить длину дуги кривой $y = 2+\mathrm{ch}\, x,\ 0\le x\le 1$

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=8(\cos t+t\sin t) \\ y=8(\sin t-t\cos t) \end{cases},\ 0\le t\le p/4$.

7.Вычислить среднее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{x^5+x}$ на отрезке [1;1,5]

8.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y^3=x-2,\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ x=0$ вокруг оси OY.

9.Вычислить работу, затраченную на выкачивание воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания r и высота h.

Вариант 19

1. $\displaystyle\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}},\ \int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}},\ \int\limits_0^{\frac{p}{3}} xe^{2x}dx,\ \int\limits_1^2 \frac{1-x}{(x^2+x+1)x}dx.$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$ и $x^2+y^2=5$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=\sin^2\dfrac{j}{2}$ и $j=\dfrac{p}{2}$.

4.Вычислить площадь, ограниченную кривыми $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=6(1-\cos t) \end{cases},\ \ y=9, (y\geq 9)$.

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\sin x,\ \dfrac{p}{2}\leq x\leq\dfrac{2p}{3}$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases},\ \ 0\leq t\leq\dfrac{p}{6}$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\displaystyle\int\limits_0^{2p}\frac{dx}{\sqrt{10+3\cos x}}$.

8.Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y=2x-x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

9.Вычислить массу стержня длины 100 см, если линейная плотность стержня меняется по закону $d=(20x+0{,}15x^2)$ г/см, где x-расстояние от одного из концов стержня.

Вариант 20

1. $\int\limits_0^{\pi/12}\frac{dx}{ctg3x}$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$, $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$, $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1+x}dx}{x+5}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами

$y=x^2-6x+10, y=6x-x^2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=3+2\cos 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}, \; y=2 \; (y\ge 2).$$

5. Вычислить длину дуги кривой $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}, \left(\frac{1}{4}\le x\le 1\right)$.

6. Найти длину дуги кривой $r=2(1-\cos\varphi), 0\le\varphi\le\pi$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^2\frac{x^2+5}{x^2+2}dx$, не вычисляя его.

8. Найти объем тела вращения, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x-1}$, $y=0, y=1, x=0{,}5$ около оси ОХ.

9. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 5 см., если сила 0.05 кГ. сжимает ее на 1см.

Вариант 21

1. $\int\limits_0^{-2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$, $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, $\int\limits_1^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$, $\int\limits_0^3\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $4y=x^2$, $y=4$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=3\sin 2\varphi$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}, \; y=2 \; (y\ge 2).$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, \quad 0\le x\le \pi/6$.

6.Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin\ t - \sin\ 2t) \end{cases}$, *0 £ t £ 2p.*

7.Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{4-3x^2}\,dx$, не вычисляя его.

8.Определить объем тела вращения фигуры, образованной линиями *2x-x²-y=0, 2x²-4x+y=0* вокруг оси OX.

9.Скорость движения тела пропорциональна кубу времени. В конце 8-й секунды скорость тела равна 5 м/с. Чему равен путь, пройденный телом за 15с.?

Вариант 22

1. $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx,\ \int\limits_1^e \ln^2 x\,dx,\ \int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}},\ \int\limits_0^{16}\sqrt{256-x^2}\,dx.$

2. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями *xy=1, x=y, y=4.*

3. Вычислить общую часть площади, ограниченную линиями в полярной системе координат *r=2(1+*cos*j), r=2.*

4. Вычислить площадь фигуры $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, *p/2 £ t £ 2p/3.*

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}, \left(0 \le x \le \frac{25}{9}\right).$

6. Вычислить длину дуги кривой *r=7(1-*sin*j), -p/6 £ j £ p/6.*

7. Доказать, что $\frac{2}{5} \le \int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} \le \frac{1}{2}.$

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями *y²=4-x* и *x=0* вокруг оси OY.

9. Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина лежит на глубине 4 м.

Вариант 23

1. $\int\limits_0^{p/8} tg2x\,dx,\ \int\limits_{\sqrt{2}}^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{2-x^2}},\ \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x - e^{-x}}},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x$, $y=x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат $r=3\sin 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases},\ 0\le t\le \pi .$$

5. Вычислить длину дуги кривой $y=\arcsin e^{-x}$, $0\le x\le 1$.

6. Вычислить длину дуги кривой $r=2e^{3/4\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.

7. Доказать, что $\dfrac{\pi}{4}\le\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\le\frac{\pi\sqrt{6}}{8}$.

8. Найти объем тела вращения, если вокруг оси OY вращается фигура, ограниченная линиями $y=(x-1)^2$, $y=1$.

9. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой a=10 м, верхнее b=6 м и высота h=5 м, если уровень погружения нижнего основания s=20 м.

Вариант 24

1. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{7-x^2}},\ \int_0^{\infty}x^3e^{-2x}dx,\ \int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx,\ \int_0^1\frac{x\,dx}{3+2\sqrt{x}}$.

2.Найти площадь фигуры между линией $y=xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a(1+\sin\varphi)$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$, $y=3$

$(y\ge 3)$.

5. Вычислить длину дуги линии $y=0{,}5x^2$, отсеченной прямой $y=2$.

6.Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$.

7.Оценить интеграл $\displaystyle\int_0^1\sqrt[3]{4-3x^2}\,dx$, не вычисляя его.

8.Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, образованной кривыми $y=x^2$ и $y^2=x$ около оси OX.

9.Какую работу надо затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности земли на высоту h ? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено в бесконечность?

Вариант 25

1. $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx,\ \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^2},\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}dx}{x+5},\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$ и $y = x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной систем координат $r=4+\cos 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$,

$y = 2, (y \geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y^2=4/9(2-x)^3$, отсеченной прямой $x= -1$.

6. Вычислить длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$.

7. Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt[3]{5-4x^2}\,dx$, не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной дугой кривой $x^{\frac{2}{3}} = y$, линиями $x=0$, $x=3$ и $y=0$.

9. Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр, перпендикулярно к его плоскости.

Вариант 26

1. $\int_0^{p/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx,\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx,\ \int_0^2 \frac{x^2 dx}{1+x^3},\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4+x$, $x+3y=0$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\cos 2j$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 8\left(t - \sin t\right) \\ y = 8\left(1 - \cos t\right) \end{cases}$,

$y = 12, \left(y \geq 12\right), \left(0 \leq x \leq 16p\right).$

5. Вычислить длину дуги параболы $y=x^2/2-1$, отсеченной осью OX.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq \dfrac{p}{4}$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_{p/4}^{p/2} \dfrac{\cos x}{x} dx$, не вычисляя его.

8. Найти объем тела, образующегося при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x-4}$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 2$..

9. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра?

Вариант 27

1. $\int\limits_0^1 xe^{2x^2} dx$, $\int\limits_0^p x\cos\dfrac{x}{3} dx$, $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}e^{-x} dx$, $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = \sin j$, $r = 2\sin j$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$,

$y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3})$.

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ от точки $x = -\dfrac{1}{2}$ до $x = \dfrac{1}{2}$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3\left(t - \sin t\right) \\ y = 3\left(1 - \cos t\right) \end{cases}$, $p \leq t \leq 2p$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$, не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линями $y=2x-x^2$, $y=2-x$, $x=0$ вокруг оси OX.

9. Пружина имеет длину 20 см. Сила в 10 кГ растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 до 35 см.

Вариант 28

1. $\int\limits_{-1}^{-6}\sqrt{3-x}\ dx,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)},\ \int\limits_{0}^{p/4}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\ dx,\ \int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{e^x}\ dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$y=\arccos x,\ \ x=0,\ \ y=0.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=\cos j+\sin j$.

4. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \\ y=6(1-\cos t)\end{cases}$,

$y=9,\ (y\geq 9),\ 0\leq x\leq 12.$

5. Найти длину дуги кривой $y=-\ln\cos x,\ 0\leq x\leq \frac{p}{4}$.

6. Определить длину дуги кривой $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t)\end{cases},\quad \frac{p}{2}\leq t\leq \frac{2p}{3}$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, не вычисляя его.

8. Определить объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями

$x^2+y^2=4,\ y=\pm 1$ около оси OY.

9. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность воды 1000 Кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из 4 –х его вертикальных стенок, размеры которой 0,4м **x** 0,7м.

Вариант 29

1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^4},\ \int\limits_{2}^{8}\frac{dx}{\sqrt{x}},\ \int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx,\ \int\limits_{0}^{\infty}x^2e^{-x/2}dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=5(1-\sin j)$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от x=π/3 до x=π/2.

6. Вычислить длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$.

7. Доказать, что $9 \le \int\limits_8^{18} \frac{x+1}{x+2}dx \le 9{,}5$, не вычисляя интеграла.

8. Найдите объем тела, образованного вращением параболы $y^2=4ax$ вокруг оси OX от ее вершины до точки $x=3a$.

9. Материальная точка движется со скоростью $u(t) = \operatorname{arctg} t$ м/с. Вычислить путь, пройденный за 20 секунд с момента начала движения.

Вариант 30

1. $\int\limits_1^3 x\sqrt{x^2-1}dx,\ \int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx,\ \int\limits_0^{p/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(1/4)x^2$, $y=3x-x^2/2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\cos j$ - $\sin j$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$,

$y=12$, $(y^3 12)$, $0<x<16p$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$, $p/6 £ t £ p/4$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+2x^3}dx$, не вычисляя его

8. Найти объем тела вращения, если вокруг оси OY вращается фигура, ограниченная линиями $y=(x-1)^2$, $y=1$.

7. Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиной в 5 м, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром в 1 м, а удельный вес железобетона 2500 кг/м^3.

Вариант 31

1. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx,\ \int\limits_2^4 x^2 \sqrt[3]{x^3-8}dx,\ \int\limits_1^2 x\ln(x+1)dx,\ \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=16/x^2$, $y=17-x^2$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=1/2+\sin\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=10(t-\sin t) \\ y=10(1-\cos t) \end{cases}$,

$y=15$, ($y \geq 15$), $0 \leq x \leq 20\pi$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(x^2-1)$, $2 \leq x \leq 3$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$, $\pi \leq t \leq 2\pi$.

7. Доказать, что $\frac{2}{5} \leq \int\limits_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5x-6$, $y=0$ вокруг оси ОХ.

9. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см., один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

Вариант 32

1. $\int\limits_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}},\ \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx,\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2},\ \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2+2y$, $x=(y+2)^2$, $x=-y$, (-1≤x≤1).

3.Вычислить общую часть фигуры, образованную линиями $r^2=4\cos 2j$, $r=\sqrt{2}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $y=2$, $(y³2)$.

5.Вычислить длину дуги кривой $y=5+\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0£ x £ 1$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3{,}5\left(2\cos t - \cos 2t\right) \\ y = 3{,}5\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{cases}$, $0 \le t \le p\,/2$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_0^p \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$.

8.Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $x=1$ вокруг оси OY.

9.Цилиндр диаметром 50 см. длиной 200 см. заполнен паром под давлением 20 кг/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в 4 раза, считая, что температура пара остается постоянной?

***Несобственный интеграл и его вычисление**

Если подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней или граничной точке отрезка интегрирования ***[a;b],*** или же сам интервал интегрирования является бесконечным, то мы имеем дело уже не с определенным, а с ***несобственным интегралом.*** В этом случае значение интеграла определяется с помощью понятия предела.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, $(b>a)$.

Решение:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{e\to+0}\int_{a+e}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} -\lim\limits_{e\to+0} \left.\dfrac{1}{(p-1)(x-a)^{p-1}}\right|_{a+e}^{b}, \text{при } p>1 \\ \lim\limits_{e\to+0} \left.\dfrac{(x-a)^{1-p}}{(1-p)}\right|_{a+e}^{b}, \text{при } p<1 \\ \lim\limits_{e\to+0} \ln|x-a| \Big|_{a+e}^{b}, \text{при } p=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{e\to+0} \dfrac{1}{(p-1)(e)^{p-1}} - \dfrac{1}{(p-1)(b-a)^{p-1}}, \text{при } p>1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)} - \lim\limits_{e\to+0} \dfrac{(e)^{1-p}}{(1-p)}, \text{при } p<1 \\ \ln|b-a| - \lim\limits_{e\to+0} \ln|e|, \text{при } p=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty\,(\text{расходится}) \text{ при } p\ge 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)}(\text{сходится}) \text{ при } p<1 \end{cases}.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

Решение: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^0 xe^{-x^2}dx + \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_0^B xe^{-x^2}dx =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^{-x^2}d(-x^2) - \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty} e^{-x^2}\Big|_A^0 -$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty} e^{-A^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty} e^{-B^2} = 0.$$

Таким образом, указанный интеграл сходится и равен нулю.

Содержание

Анатолий Николаевич Филиппов

Тамара Сергеевна Филиппова

Кафедра

“Высшая математика”

Считка авторская