Министерство образования и науки Российской федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

В.В. Сотников, Л.Ф. Макарова

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Санкт-Петербург
2010

УДК 66-5 (681.51)

Сотников, В. В. Основы теории управления: методические указания к выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения / В. В. Сотников, Л. Ф. Макарова. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2010. – 50 с.

В методических указаниях приведены задания и примеры выполнения контрольных работ по учебной дисциплине «Основы теории управления».

Пособие предназначено для студентов 3 курса заочной формы обучения по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника» и соответствует рабочей программе дисциплины «Основы теории управления».

Рис. 18, табл. 6, библиогр. назв. 20.

Рецензент:

В.А. Холоднов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов СПбГТИ(ТУ)

Утверждены на заседании учебно-методической комиссии факультета информатики и управления протокол №8 от 24.05.2010.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

© СПбГТИ(ТУ), 2010.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 4
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1 5
Задание 1.1 Операционное исчисление 5
Пример выполнения контрольных заданий 1.1 6
Задание 1.2 Общие принципы системной организации 8
Примеры выполнения контрольных заданий 1.2 11
Задание 1.3 Одноконтурные системы управления. Законы регулирования 15
Примеры выполнения контрольных заданий 1.3 16
Задание 1.4 Построение частотных характеристик и годографа Михайлова 19
Пример выполнения контрольных заданий 1.4 21
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2 23
Задание 2.1 Устойчивость систем управления 23
Примеры выполнения контрольных заданий 2.1 25
Задание 2.2 Частотные критерии устойчивости 30
Пример выполнения контрольных заданий 2.2 30
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3 32
Задание 3.1 Управляемость и наблюдаемость 32
Примеры выполнения контрольных заданий 3.1 34
Задание 3.2 Математические модели. Структурный метод 35
Примеры выполнения контрольных заданий 3.2 36
ЛИТЕРАТУРА 38

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В методических указаниях приведены 3 контрольные работы. Студенту необходимо представить отчёт со *всеми тремя* контрольными работами, выполненными в соответствии с данными методическими указаниями. Номер варианта формируется согласно последним двум цифрам номера зачетной книжки.

Две последние цифры зачётной книжки	Номер варианта	Две последние цифры зачётной книжки	Номер варианта
01, 26, 51, 76	1	13, 38, 63, 88	13
02, 27, 52, 77	2	14, 39, 64, 89	14
03, 28, 53, 78	3	15, 40, 65, 90	15
04, 29, 54, 79	4	16, 41, 66, 91	16
05, 30, 55, 80	5	17, 42, 67, 92	17
06, 31, 56, 81	6	18, 43, 68, 93	18
07, 32, 57, 82	7	19, 44, 69, 94	19
08, 33, 58, 83	8	20, 45, 70, 95	20
09, 34, 59, 84	9	21, 46, 71, 96	21
10, 35, 60, 85	10	22, 47, 72, 97	22
11, 36, 61, 86	11	23, 48, 73, 98	23
12, 37, 62, 87	12	24, 49, 74, 99	24

Если две последние цифры зачётной книжки 00, 25, 50 или 75, то номер варианта − 25.

Отчёт о выполненных контрольных работах должен включать: титульный лист, условие задачи и подробную процедуру решения, аналогично тому, как это представлено в примерах выполнения работ. Во время защиты отчёта студент должен уметь обосновать представленное в отчёте решение. На титульном листе отчёта о выполнении контрольных работ необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер варианта.

Приступая к выполнению контрольных работ, рекомендуется ознакомиться со следующим учебным пособием:

Сотников, В. В. Основы теории управления. Базовый курс: учебное пособие для студентов заочной формы обучения / В. В. Сотников, Л. Ф. Макарова. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2010. – 160 с.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Контрольная работа № 1 состоит из 4-ых заданий.

Задание 1.1 Операционное исчисление

Записать уравнение в изображении по Карсону в нижеприводимых заданиях:

Вариант 1. $ax' + by = \int f(t)dt$ при н.у. $\neq 0$ и $f(t) = 1(t)$.

Вариант 2. $ax + by'' = z'(t-\tau) + c$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 3. $ay''' = \int f(t)dt$ при н.у $\neq 0$ и $f(t) = e^{-\alpha t}$.

Вариант 4. $ax^{(5)} + by^{(3)} = z^{(2)}(t-\tau)$ при н.у. $= 0$.

Вариант 5. $\int f(t)dt = ax'' + by''$ при н.у. $\neq 0$ и $f(t) = 1(t)$.

Вариант 6. $ax''' + by''' = z(t-\tau)$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 7. $ax''' + by''' + \int f(t)dt = 0$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 8. $c\int f(t)dt = x'(t-\tau)$ при н.у. $= 0$.

Вариант 9. $\int f(t)dt + x'' = y''' + cz$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 10. $x(t-\tau) + y''(t-\tau) + z' = 0$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 11. $\cos\omega t + x'''(t-\tau) = 0$ при н.у. $= 0$.

Вариант 12. $\sin\omega t + x''(t-\tau) = 0$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 13. $\sin\omega t + \cos\omega t = x'''$ при н.у. $= 0$.

Вариант 14. $\sin\omega t + x - x'''(t-\tau) = 0$ при н.у. $= 0$.

Вариант 15. $\int f(t)dt = ax''' + by$ при н.у. $\neq 0$ и $f(t) = U = \text{const}$.

Вариант 16. $a_1x^{(IV)} + a_2x''' = f'(t-\tau)$ при н.у. $= 0$.

Вариант 17. $a^2x''' + c\int f(t)dt = z(t-\tau)$ при н.у. $\neq 0$ и $f(t) = U$

Вариант 18. $z'''(t-\tau) = \cos\omega t$ при н.у $\neq 0$.

Вариант 19. $x'''(t-\tau) + by = \sin\omega t$ при н.у. $= 0$.

Вариант 20. $x'' + y' + \sin\omega t = 1$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 21. $\cos\omega t + \int_0^t Udt = x''(t-\tau)$ при н.у. $= 0, U = \text{const}$.

Вариант 22. $e^{j\omega t} + x'' + y'' = 10$ при н.у. $\neq 0$.

Вариант 23. $1 + U = C + e^{-\alpha t}$ где $U = \text{const}$, $C = \text{const}$.

Вариант 24. $\sin\omega t + x'''(t-\tau) = \int_0^t 1(t)dt$ н.у. $= 0$.

Вариант 25. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 1 = \frac{d^2y}{dt^2}$ при н.у. $= 0$.

Каждое решение пояснить.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Пример выполнения контрольных заданий 1.1

Дано уравнение вида:

$$a^2x + y = z' + cy, \qquad \text{при н.у.} = 0. \qquad (1)$$

Записать изображение этого выражения по Карсону.

В общем виде изображения по Карсону уравнения (1) представим следующим образом:

$$L(a^2x + y) = L(z' + cy). \qquad (2)$$

Далее, на основании теоремы суперпозиции (2) запишем в виде:

$$La^2x + Ly = Lz^1 + Lcy.$$

На основании теоремы линейности:

$$La^2x + Ly = Lz' + Lcy.$$

$$Lcy = cLy = cY(s).$$

На основании изображения производной:

$$Lz' = sZ(s). \qquad (4)$$

Тогда изображение по Карсону уравнения (1) запишем в виде:

$$a^2X(s) + Y(s) = sZ(s) + cY(s). \qquad (5)$$

Дано уравнение вида:

$$cx(t - \tau) = by'' + y. \qquad (6)$$

Записать его изображение по Карсону при

В общем виде изображение по Карсону уравнения (6) представимо следующим образом:

$$L\big(cx(t - \tau)\big) = L(by'' + y). \qquad (7)$$

На основе теоремы суперпозиции уравнения (7) запишем в виде:

$$L\big(cx(t - \tau)\big) = Lby'' + Ly. \qquad (8)$$

С учетом теоремы линейности это выражение перепишем в виде:

$$cLx(t - \tau) = bLy'' + Ly. \qquad (9)$$

На основании изображения функции с запаздывающим аргументом и

производной запишем уравнение (9) в виде:

$$ce^{-s\tau}X(s) = bs^2Y(s) - bs^2y(0) - bsy'(0) + Y(s). \qquad (10)$$

$$\text{где } X(s) = L\big(x(y - \tau)\big)_{\tau=0};\ Y(s) = Ly$$

Уравнение (10) является результатом решения примера.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Задано уравнение:

$$x''(t-\tau) = ay, \qquad \text{при н.у.} = 0. \qquad (11)$$

Записать его изображение по Карсону при н.у.= 0.

Изображение по Карсону уравнения (11) первоначально запишем в виде:

$$L\big(x''(t-\tau)\big) = L(ay). \qquad (12)$$

На основании изображения производной (12) перепишем в виде:

$$s^2 L\big(x(t-\tau)\big) = L(ay). \qquad (13)$$

На основании изображения функции с запаздыванием аргументом уравнение (13) запишем в виде:

$$s^2 e^{-s\tau} X(s) = L(ay). \qquad (14)$$

Используя теорему линейности уравнения (14) запишем в виде:

$$s^2 e^{-s\tau} X(s) = aY(s), \qquad (15)$$

где $X(s) = Lx(t); Y(s) = Ly.$

Уравнение (15) является решением исходной задачи.

Дано уравнение:

$$x''(t-\tau) = ay \qquad (16)$$

Записать его изображение по Карсону при .

Решение этой задачи осуществляем по схеме решения задачи III с учетом не нулевых начальных условий.

$$L(x''(t-\tau)) = L(ay).$$

$$s^2 L(x(t-\tau)) - s^2 x(0) - sx'(0) = Lay.$$

$$s^2 e^{-s\tau} X(s) - s^2 x(0) - sx'(0) = Lay.$$

$$s^2 e^{-s\tau} X(s) - s^2 x(0) - sx'(0) = aY(s).$$

Записать в изображениях по Карсону при ну = 0 уравнение вида:

$$\int_0^t f(t)dt = cy'''. \qquad (17)$$

Перепишем это выражение в изображении по Карсону в общем виде:

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

$$L\left(\int_0^t f(t)dt\right) = L(cy'''). \qquad (18)$$

На основании теоремы об изображении интеграла и теоремы линейности это уравнение перепишем в виде:

$$\frac{\varphi(s)}{s} = cLy''', \qquad (19)$$

где $\varphi(s) \risingdotseq f(t)$ по Карсону.

Используя теорему об изображении производной, получим окончательный результат в виде:

$$\frac{\varphi(s)}{s} cs^3 Y(s). \qquad (20)$$

При это выражение запишемся в виде:

$$\frac{\varphi(s)}{s} = c\left(s^3 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0)\right). \qquad (21)$$

Задание 1.2 Общие принципы системной организации

Задание типа 1. Записать собственную передаточную функцию (ПФ) для дифференциального уравнения:

Вариант 1. $7\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{d^2x}{dt^2} + x = ku$

Вариант 2. $3\frac{d^4x}{dt^4} + 7\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} + x = kf(t-\tau)$

Вариант 3. $2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + x = kf^{(1)}(t-\tau)$

Вариант 4. $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = k\frac{dy}{dt}$

Вариант 5. $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} = k\frac{d^2y}{dt^2}$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Задание типа 2. Записать обобщенную передаточную функцию для дифференциальных уравнений.

Вариант 6. $\frac{d^3x}{dt^3}+8\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=ku$

Вариант 7. $3\frac{d^3x}{dt^3}+7\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=kf(t-\tau)$

Вариант 8. $2\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+x=k\frac{df(t-\tau)}{dt}$

Вариант 9. $6\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=k\frac{dy}{dt}$

Задание типа 3. Записать дифференциальные уравнения по известным передаточным функциям.

Вариант 10. $W(s)=\frac{K}{10s^2+2s+1}$

Вариант 11. $W(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{5s^3+2s^2+s+1}$

Вариант 12. $W(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{4s^2+s+1}$

Вариант 13. $W(s)=\frac{Ks}{9s^3+s+1}$

Вариант 14. $W(s)=\frac{Ks}{s^3+s^2+s+1}Y(s)$

Вариант 15. $W(s)=\frac{Ks^2}{3s^3+2s^2+s+1}$

Вариант 16. $W(s)=\frac{Ks^3}{s^4+s^2+1}Y(s)$

Вариант 17. $W(s)=\frac{Ks^3}{5s^3+10s^2+1}Y(s)$

Вариант 18. $W(s)=\frac{Ks^2}{2s^3+2s^2+s+1}Y(s)$

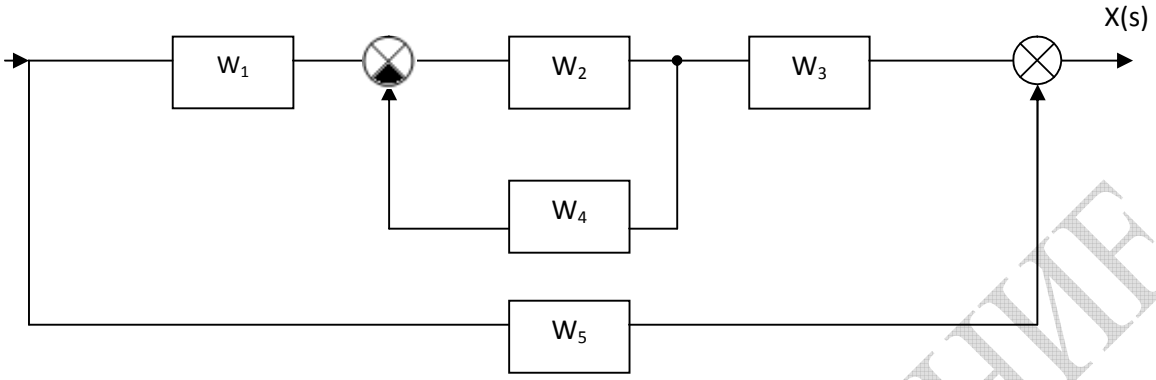
Вариант 19. $W(s)=\frac{Kse^{-\tau s}}{s^4+s^3+s^2+s+1}Y(s)$

Вариант 20. $W(s)=\frac{Ks^2e^{-\tau s}}{s^5+s^3+s+1}$

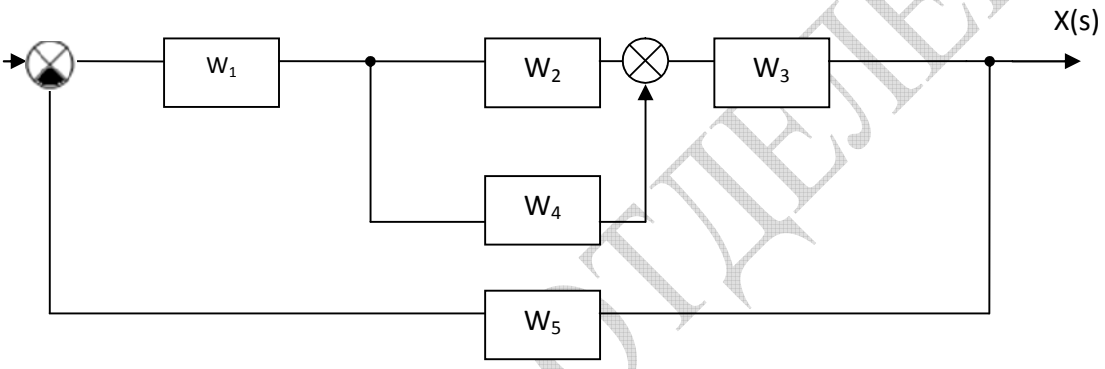
ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Задание типа 4. Упростить структурные схемы

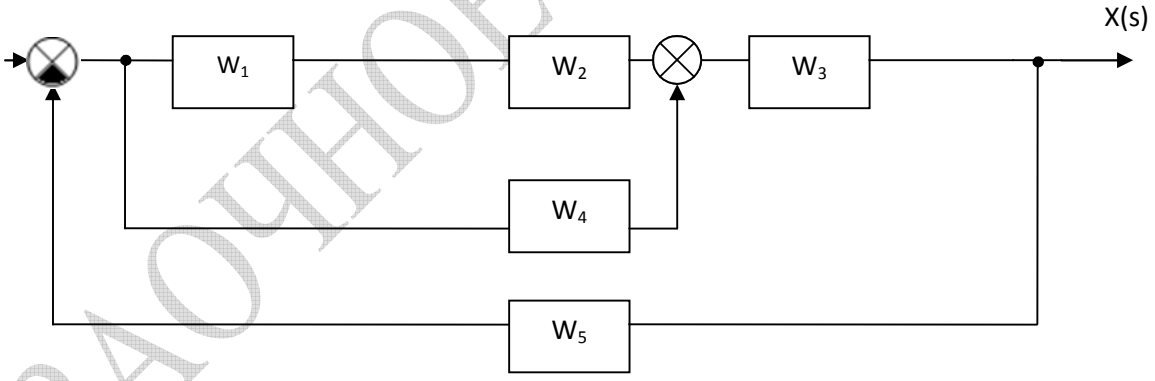
Вариант 21.



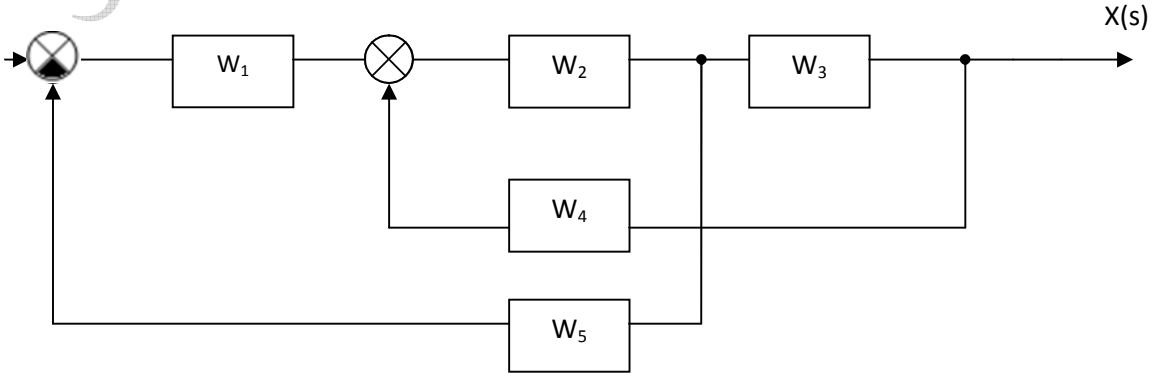
Вариант 22.



Вариант 23.

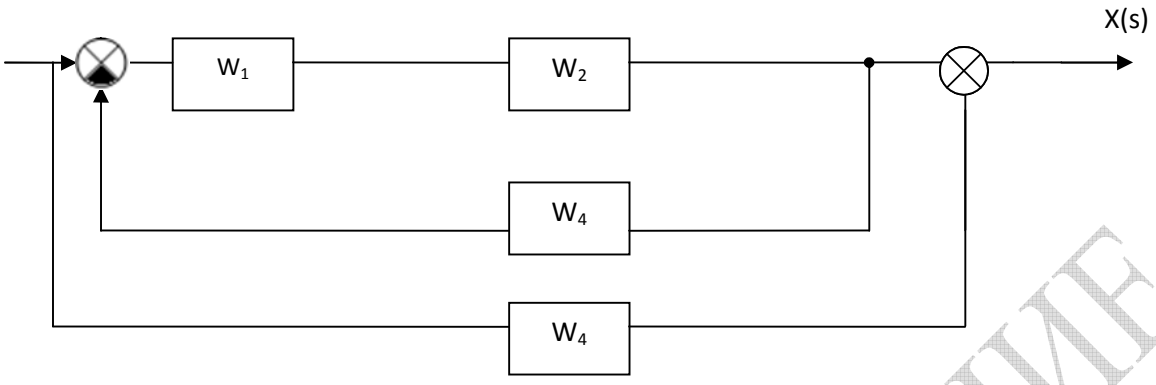


Вариант24.



ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Вариант 25



Примеры выполнения контрольных заданий 1.2

Пример решения заданий типа 1

1) Дано дифференциальное уравнение системы управления в виде:

$$5\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=Ky \qquad (1)$$

Получить для него обобщенную и собственные передаточные функции.

Решение

Запишем уравнение (1) в изображениях по Карсону, заменив оператор дифференцирования p на переменную s :

$$(5s^2+3s+1)\,X(s)=KY(s) \qquad (2)$$

Так как выражение для передаточной функции можно записать в виде

$$W(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}, \qquad (3)$$

то из (2) можно записать решения:

- обобщенная передаточная функция:

$$W(s)=\frac{K}{5s^2+3s+1}Y(s) \qquad (4)$$

- собственная передаточная функция, которая записывается из (4) при Y(s)=1:

$$W(s)=\frac{K}{5s^2+3s+1} \qquad (5)$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Пример решения заданий типа 2

2) Дана обобщенная передаточная функция в виде:

$$W(s) = \frac{K}{4s^2 + s + 1} Y(s) \tag{6}$$

Записать соответствующее ей дифференциальное уравнение.

Решение

Учитывая уравнение (3), запишем из (6) выражение:

$$X(s) = \frac{K}{4s^2 + s + 1} Y(s) \tag{7}$$

Освободившись от знаменателя, получим

$$(4s^2 + s + 1)X(s) = KY(s) \tag{8}$$

Произведя замену s на p , запишем (8) в операторной форме:

$$(4p^2 + p + 1)X(p) = KY(p) \tag{9}$$

Учитывая, что $p \equiv \frac{d}{dt}$, и переходя от операторной формы уравнения (9) к оригиналу, получим искомое решение:

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = ky \tag{10}$$

Пример решения заданий типа 3

1) Дана собственная передаточная функция в виде:

$$W(s) = \frac{K}{10s^3 + 5s^2 + 1} \tag{11}$$

Записать соответствующее ей дифференциальное уравнение.

Решение

Учитывая (3) и (11), запишем

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K}{10s^3 + 5s^2 + 1}\ , \tag{12}$$

откуда

$$X(s) = \frac{K}{10s^3 + 5s^2 + 1} Y(s) \tag{13}$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

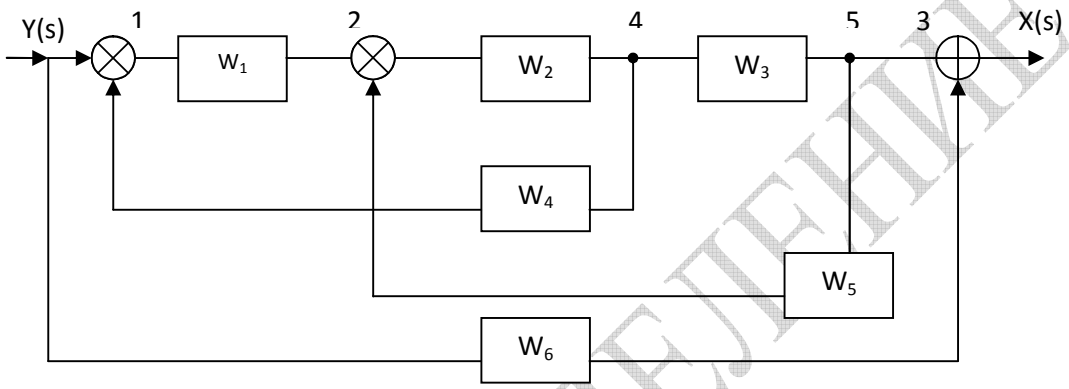
Далее, выполняя действия, аналогичные действиям с уравнениями (8, 9, 10) из примера 2, получим решение:

$$10\frac{d^3x}{dt^3}+5\frac{d^2x}{dt^2}+x=ky$$

Пример решения заданий типа 4

4) Привести заданную структурную схему к виду

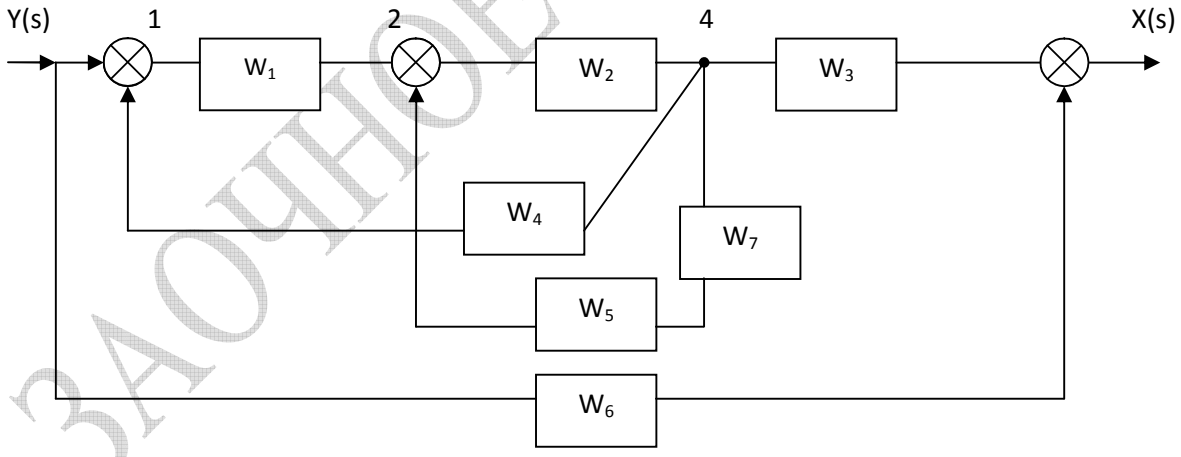
$$X(S) = W(S) \cdot У(S)$$



<u>Решение</u>

В соответствии с правилами преобразования структурных схем последовательность действий следующая:

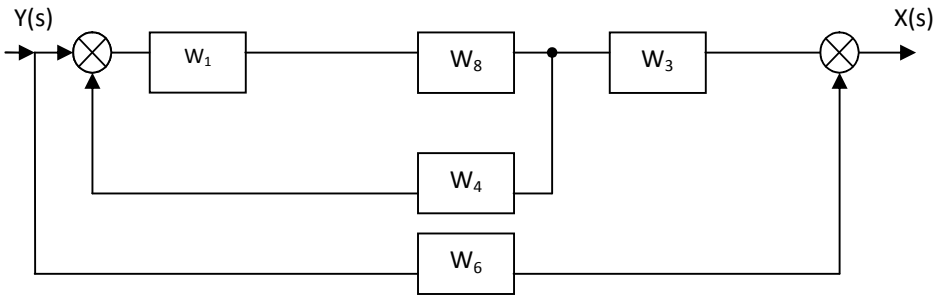
1-й шаг. Перенеся узел 5 с выхода звена W_3 на его вход, получим



При этом $W_7 = W_3$

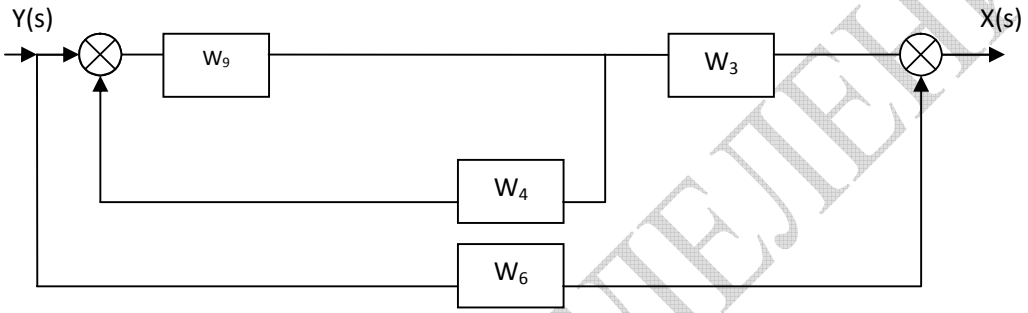
2-й шаг. Звено W_2 вместе с W_7 и W_5 представим в виде звена, охваченного отрицательной обратной связью. Тогда структурная схема приобретет вид

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ



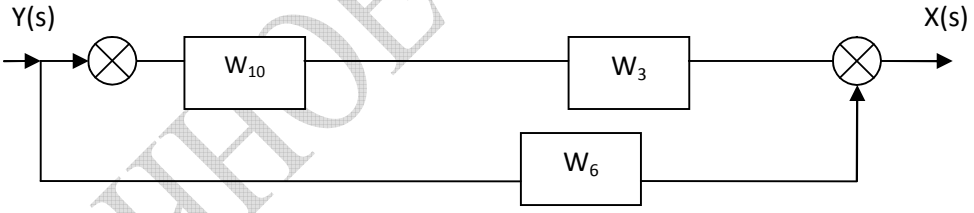
При этом $W_8 = \dfrac{W_2}{1+W_2W_5W_7}$

3-й шаг. Звенья W_1 и W_8 заменим одним звеном с передаточной функцией $W_9 = W_1 \cdot W_8$.

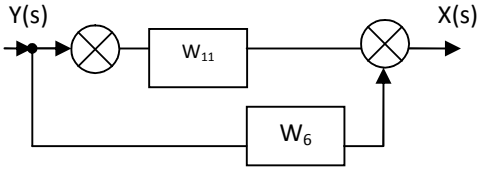


4-й шаг. Звенья W_9 и W_4, включенные по схеме отрицательной обратной связи, заменим одним звеном с передаточной функцией

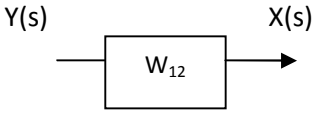
$$W_{10} = \frac{W_9}{1+W_4W_9}$$



5-й шаг. Звенья W_{10} и W_3 заменим одним звеном с передаточной функцией $W_{11} = W_{10} \cdot W_3$



6-й шаг. Параллельно соединенные звенья W_{11} и W_6 заменим одним звеном $W_{12} = W_{11} + W_6$



Откуда следует равенство $X(s) = W(s) \cdot Y(s)$. Это решение задачи.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Задание 1.3 Одноконтурные системы управления. Законы регулирования

Вариант 1. Для схемы (рисунок 2) определить $F_g(s)$ в динамике.

Вариант 2. Для схемы (рисунок 2) определить $F_f(s)$ в динамике.

Вариант 3. Для схемы (рисунок 2) определить статическую ошибку по управляющему воздействию, заменив Wp(s) на Wp(s) = K.

Вариант 4. Для схемы (рисунок 2) определить статическую ошибку по возмущающему воздействию.

Вариант 5. Для схемы (рисунок 2) определить величину X(S) в динамике.

Вариант 6. Для схемы (рисунок 2) определить статическую ошибку, заменив $W_p(s)$ на передаточную функцию ПИ-регулятора.

Вариант 7. Для схемы (рисунок 2) определить статическую ошибку при использовании Д–регулятора.

Вариант 8. Для схемы (рисунок 2) определить величину $X_g(s)$ в статическом режиме при использовании ПИД–регулятора.

Вариант 9. Для схемы (рисунок 2) определить величину F(s) в статическом и динамическом режиме при использовании П-регулятора.

Вариант 10. В схеме (рисунок 2) перенести сумматор с возмущением со входа звена с передаточной функции $W_{10}(s)$ на его выход и определить изображение динамической ошибки системы. В качестве $W_o(s)$ принять $W_{20}(s)$.

Вариант 11. В схеме (рисунок 2) перенести сумматор с возмущением со входа звена с передаточной функцией $W_{10}(s)$ на его выход и определить изображение статической ошибки по возмущению.

Вариант 12. В схеме (рисунок 2) определить статическую ошибку регулирования при использовании П-регулятора.

Вариант 13. В схеме (рисунок 2) определить $E_g(s)$ для регулятора с передаточной функцией $W_p(s) = K$.

Вариант 14. В схеме (рисунок 2) определить $E_f(s)$ в случае использования ПИД–регулятора.

Вариант 15. В схеме (рисунок 2) определить X(s) при использовании ПИ-регулятора.

Вариант 16. В схеме (рисунок 2) определить изображение ошибки по возмущающему воздействию в динамике при использовании И-регулятора.

Вариант 17. Для схемы (рисунок 2) определить составляющую выходной координаты по возмущению при использовании Д- регулятора.

Вариант 18. Для схемы (рисунок 2) определить составляющую выходной координаты по управляющему воздействию при использовании Д-регулятора.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Вариант 19. Для системы (рисунок 2) определить статическую ошибку при использовании ПИД-регулятора.

Вариант 20. Для системы (рисунок 2) определить статическую ошибку по управляющему воздействию при использовании П-регулятора.

Вариант 21. Для системы (рисунок 2) определить ошибку регулирования по возмущающему воздействию при использовании интегрального регулятора.

Вариант 22. Для системы (рисунок 2) определить общую ошибку регулирования в установившемся состоянии при использовании И-регулятора.

Вариант 23. Для системы (рисунок 2) определить установившуюся ошибку регулирования при использовании П-регулятора.

Вариант 24. Определить в системе (рисунок 2) изображение динамической ошибки при использовании ПИ-регулятора.

Вариант 25. В системе (рисунок 2) определить изображения динамической и статической ошибки по управляющему воздействию при использовании П-регулятора.

Ход решения необходимо пояснить.

Примеры выполнения контрольных заданий 1.3

Задание 1

В одноконтурной системе определить изображения переходных процессов по управляющему и возмущающему воздействиям. Из лекционного курса известно, что

$$X(S) = X_g(S) - X_f(S), \qquad (1)$$

где $X(S)$ – изображение выходной координаты системы;
$X_g(S)$ – изображение выходной координаты по управляющему воздействию;
$X_f(S)$ – изображение выходной координаты по возмущающему воздействию.

$$X(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} X_0(s) - \frac{W_0}{1+W(s)} F(s) \qquad (2)$$

где $W(S)$ – передаточная функция разомкнутой одноконтурной системы;
$X_o(S)$ – изображение задающего воздействия;
$F_o(S)$ – изображение возмущающего воздействия.

Пример решения задания 1

Дана структурная схема одноконтурной системы

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

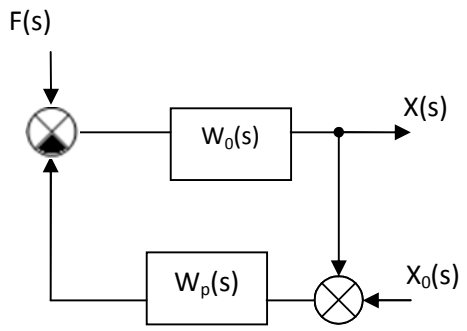


Рисунок 1 – Одноконтурная система управления

Пусть $W_0(s)=\dfrac{K_0}{T_2s^2+T_1s+1}$ – передаточная функция объекта;

$W_p(s)=\dfrac{KT_ns+1}{T_ns}$ – передаточная функция ПИ-регулятора;

F(s – изображение возмущения;

$X_o(s)$ – изображение задающего воздействия.

Определить $X_g(s)$ и $X_f(s)$.

а) $X_g(s)=\dfrac{W(s)}{1+W(s)}X_0(s)$ и $X_f(s)=\dfrac{W_0(s)}{1+W(s)}F(s)$

$W(s) = W_o(s)$, $W_p(s)$ – передаточная функция разомкнутой одноконтурной системы.

Тогда $W(s)=\dfrac{K_0}{T_2s^2+T_1s+1}\cdot\dfrac{K_pT_ns+1}{T_ns}$ и следовательно:

$$X_g(s)=\frac{K_0(K_pT_ns+1)}{(T_2s^2+T_1s+1)T_ns+K_0(K_pT_ns+1)}X_0(s) \qquad (3)$$

Это выражение представляет собой изображение $X_g(s)$ в динамике. В установившемся состоянии при $s \to p$ $X_g(s) = 0$. Так как все переходные процессы завершились, получим из (3)

$$X_g(0)=X_o(0),$$

что отвечает свойству ПИ-регулятора.

б) $X_f(s)=\dfrac{W_0}{1+W(s)}F(s)$

тогда выражение $X_f(S)$ в динамике

$$X_f(s)=\frac{K_0(T_2s^2+T_1s+1)T_ns}{(T_2s^2+T_1s+1)[(T_2s^2+T_1s+1)T_ns+K_0(K_pT_ns+1)]}F_0(s)$$

$$=\frac{K_0T_ns}{(T_2s^2+T_1s+1)T_ns+K_0(K_pT_ns+1)}F_0(s)$$

В установившемся состоянии при $s \to p$ $X_f(S) = 0$, $X_f(s)=0$, что соответствует свойству ПИ-регулятора.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Задание 2

В одноконтурной системе определить ошибку регулирования и ошибки регулирования по управляющему и возмущающему воздействию.

Общая ошибка регулирования в одноконтурной системе определяется по формуле

$$E(s)=E_g(s)+E_f(s)\ , \qquad (4)$$

где $E_g(s)$ – ошибка по управляющему воздействию;

$E_f(s)$ – ошибка по возмущающему воздействию.

$$E_g(s)=\frac{1}{1+W(s)}X_0(s) \quad \text{и} \quad E_f(s)=\frac{W_0(s)}{1+W(s)}F(s) \qquad (5)$$

$$E(s)=\frac{1}{1+W(s)}X_0(s)+\frac{W_0(s)}{1+W(s)}F(s) \qquad (6)$$

В случае, когда определяются ошибки, при

1) $s = 0$ (или $p = 0$) получаем статическую ошибку или ее изображение;
2) $s \neq 0$ (или $p \neq 0$) получаем динамическую ошибку или ее изображение.

Пример решения задания 2

Для системы, приведенной на рисунке 2, определить статическую ошибку, если $W_{10}(s)=\frac{K_1}{T_1s+1}$; $W_{20}(s)=\frac{K_2}{T_2s+1}$; $W_p(s)=\frac{1}{s}$ - передаточная функция регулятора.

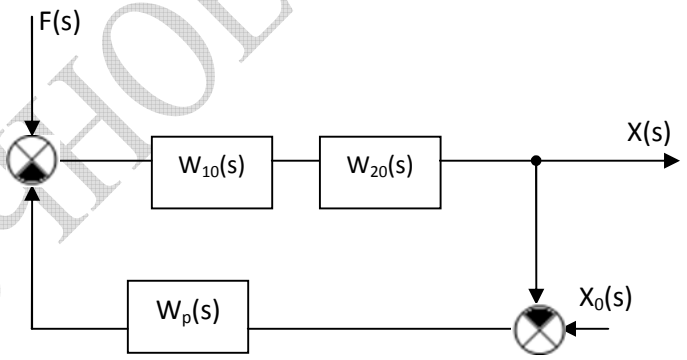


Рисунок 2 – Схема одноконтурной системы управления

<u>Решение</u>

Статическую ошибку можно определить по формуле (6) .

1) Определим передаточную функцию разомкнутой одноконтурной системы.

$$W(s) = W_{10}(s)W_{20}(s)W_p(s);$$
$$W_0(s) = W_{10}(s)W_{20}(s)$$

с учетом исходных данных.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

$$W(s)=\frac{K_1}{T_1s+1}\cdot\frac{K_2}{T_2s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_1K_2}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

тогда

$$E(s)=\frac{1}{1+W(s)}X_0(s)+\frac{W_0(s)}{1+W(s)}F(s)$$

Подставляя исходные данные, получим:

$$E(s)=\frac{1}{1+\frac{K_1K_2}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\cdot\frac{1}{s}}X_0(s)+\frac{\frac{K_1K_2}{(T_1s+1)(T_2s+1)}}{1+\frac{K_1K_2}{(T_1s+1)(T_2s+1)s}}F(s)$$

Последующее преобразование дает следующий результат:

$$E(s)=\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)s}{(T_1s+1)(T_2s+1)s+K_1K_2}X_0(s)+\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)sK_1K_2}{[(T_1s+1)(T_2s+1)s+K_1K_2](T_1s+1)(T_2s+1)}F(s)$$

Это выражение представляет собой изображение динамической ошибки. Изображение статической ошибки определим, полагая s=0: $E(0)$=0.

Следовательно, статическая ошибка регулирования, исходя из свойств операционного исчисления, $\Delta = 0$.

Аналогично можно определить $E_g(S)$ и $E_f(S)$.

Задание 1.4 Построение частотных характеристик и годографа Михайлова

Задание типа 1. Для автоматической системы регулирования с передаточной функцией вида $W(s)=\frac{K}{Ts-1}$ построить частотную характеристику в соответствии с данными таблицы 1.

Пояснить ход решения.

Таблица 1 – Варианты заданий

№ варианта	Частотная характеристика	*T*, с	*K*
1	ФЧХ	5	2
2	ФЧХ	2	5
3	ФЧХ	4	3
4	АЧХ	5	2
5	АЧХ	2	5
6	АЧХ	4	3
7	АЧХ	5	2
8	АФЧХ	5	3
9	АФЧХ	4	3
10	АФЧХ	6	1
11	АФЧХ	2	1
12	АФЧХ	3	3
13	АФЧХ	2	1

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

14	АФЧХ	6	2
15	ФЧХ	1	1
16	ФЧХ	4	5
17	ФЧХ	10	5
18	ФЧХ	2	4
19	АЧХ	4	2
20	АЧХ	2	5
21	АФЧХ	4	3
22	АФЧХ	6	2
23	АФЧХ	3	3
24	АФЧХ	4	5
25	АФЧХ	5	3

Задание типа 2. Для передаточной функции вида

$$W(s)=\frac{k}{T_3s^3+T_2s^2+T_1s+1}$$

построить годограф (кривую) Михайлова $D(j\omega)$ и определить устойчивость системы в соответствии с данными таблицы 2. Пояснить ход решения.

Таблица 2 – Варианты заданий

№ варианта	T_1,с	T_2,с	T_3,с	b_0
1	2	1	2	5
2	1	4	3	4
3	2	1	5	5
4	1	3	6	3
5	3	5	1	4
6	2	2	2	2
7	3	3	5	6
8	2	4	6	3
9	4	4	4	5
10	1	8	3	2
11	2	4	9	8
12	8	4	3	1
13	5	5	5	5
14	1	3	6	2
15	2	2	2	2
16	2	1	1	2
17	3	1	3	1
18	4	2	3	3
19	1	1	2	2
20	2	1	3	0.5
21	1	1	4	1
22	2	2	3	3
23	0.5	4	1	4
24	1	3	2	5
25	2	1	5	3

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Пример выполнения контрольных заданий 1.4

Дана передаточная функция разомкнутой системы вида

$$W(s)=\frac{K}{T_2s^2+T_1s+1} \qquad (1)$$

Построить годограф Михайлова для замкнутой системы при $T_2 = 2$ с, $T_1 = 3$ с, $K = 5$, и определить её устойчивость.

Решение

Запишем для (1) характеристический полином замкнутой системы

$$T_2s^2+T_1s+1+K=0 \qquad (2)$$

Заменяем в нем s на $j\omega$, получим

$$-T_2\omega^2+jT_1\omega+1+K=0 \qquad (3)$$

Выделим из (3) вещественную и мнимую составляющие:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\omega)&=1+K-T_2\omega^2\\ \psi(\omega)&=T_1\omega\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Тогда аналитическая запись годографа Михайлова будет представлена в виде:

$$D(j\omega)=\varphi(\omega)+j\psi(\omega)$$

Для решаемого случая она будет иметь вид:

$$D(j\omega)=1+\kappa-T_2\omega^2+jT_1\omega$$

Графическое построение $D(j\omega)$ осуществляется поточечно в осях $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ на основании (4) при изменении частоты в заданных пределах. Годограф Михайлова позволяет определить устойчивость системы на основании критерия Михайлова.

Для решения поставленной задачи определим $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ для четырёх значений частоты:

$\omega=0$	$\varphi(\omega)=6$	$\psi(\omega)=0$
$\omega=1$	$\varphi(\omega)=4$	$\psi(\omega)=3$
$\omega=2$	$\varphi(\omega)=-3$	$\psi(\omega)=4$
$\omega=4$	$\varphi(\omega)=-26$	$\varphi(\omega)=8$
$\omega=\infty$	$\varphi(\omega)=-\infty$	$\psi(\omega)=+\infty$

Строим годограф Михайлова:

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

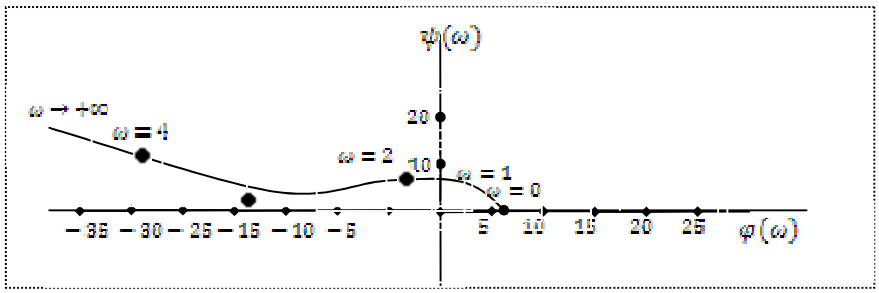


Рисунок 3 – Годограф Михайлова

Как видно из графика, кривая Михайлова удовлетворяет требованиям критерия Михайлова и, следовательно, рассматриваемая система устойчива.

Аналогично можно определить устойчивость разомкнутой системы (1), Только в качестве характеристического полинома надо рассмотреть только знаменатель (1), т.е. $T_2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Контрольная работа № 2 состоит из 2-х заданий.

Задание 2.1 Устойчивость систем управления

Задание типа 1. Определить, на основании критерия Гурвица, устойчива ли система, если ее характеристическое уравнение имеет вид:

Вариант 1 $5p^3 + p^2 + 3p + 4 = 0$

Вариант 2 $6p^2 + p + 1 = 0$

Вариант 3 $12p^3 + 10p^2 + 5p + 1 = 0$

Вариант 4 $6p^3 + 12p^2 + 4p + 1 = 0$

Вариант 5 $2p^3 + p^2 + 3p + 5 = 0$

Вариант 6 $4p^3 + 4p^2 + 2p + 1 = 0$

Задание типа 2. Проверить систему на устойчивость. Если система неустойчива, то изменить один из параметров характеристического уравнения так, чтобы система стала устойчивой; если система устойчива, то изменить один из параметров характеристического уравнения так, чтобы система стала неустойчива. Пояснить ход решения.

Вариант 7 $p^3 + p^2 + 4p + 1 = 0$

Вариант 8 $2p^3 + 4p^2 + 7p + 8 = 0$

Вариант 9 $2p^3 + 3p^2 + 4p + 5 = 0$

Вариант 10 $3p^3 + 7p^2 + 2p + 1 = 0$

Вариант 11 $5p^3 + 6p^2 + 3p + 2 = 0$

Вариант 12 $6p^3 + 4p^2 + p + 1 = 0$

Задание типа 3. Определить границу колебательной устойчивости по параметру K.

Вариант 13 $5p^4 + Kp^3 + 2p^2 + p + 4 = 0$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Вариант 14 $4p^3 + Kp^2 + p + 5 = 0$

Вариант 15 $5p^3 + 4p^2 + Kp + 1 = 0$

Вариант 16 $10p^3 + p^2 + Kp + 4 = 0$

Вариант 17 $10p^3 + Kp^2 + 4p + 5 = 0$

Вариант 18 $p^3 + 4p^2 + 3p + K = 0$

Задание типа 3. Определить границы апериодической устойчивости по параметру K.

Вариант 19 $(3 + K)p^4 + p^3 + 4p^2 + p + 10 = 0$

Вариант 20 $(15 + K)p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0$

Вариант 21 $(10 + K)p^3 + 3p^2 + 2p + 4 = 0$

Вариант 22 $(20 + K)p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1 = 0$

Вариант 23 $10p^3 + 12p^2 + 4p + 1 + K = 0$

Вариант 24 $3p^3 + 4p^2 + 3p + 10 + K = 0$

Вариант 25 $2p^3 + p^2 + 4p + 15 + K = 0$

Задание типа 5. Построить область устойчивости в плоскости одного параметра (K) для системы, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$T_2 s^2 + T_1 s + K = 0 ,$$

используя данные таблицы 3.

Таблица 3 – Варианты заданий

№ варианта	T_1, с	T_2, с
1	3	1
2	1	2
3	3	3
4	1	4
5	4	3
6	2	5
7	3	4
8	2	3

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

9	1	5
10	5	2
11	2	2
12	1	2
13	3	3
14	4	1
15	5	3
16	5	2
17	4	2
18	1	6
19	6	3
20	10	4
21	4	4
22	9	1
23	4	5
24	8	3
25	5	5

Алгебраический критерий устойчивости

Критерий Гурвица. Формулировка критерия Гурвица:

Система управления будет устойчивой, если ее характеристическое уравнение вида $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0$ имеет все определители Гурвица Δi и a_0 положительны, т.е.

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i \end{pmatrix} > 0 \qquad i=\overline{0,n}$$

Их определителя Гурвица следует, что $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$.

Определитель $\Delta i - 1$ позволяет определить границу колебательной устойчивости.

Равенства $a_0 = 0$ и $a_n = 0$ - границы апериодической устойчивости.

Примеры выполнения контрольных заданий 2.1

Пример решения заданий типа 1

Определить, устойчива ли система, если ее характеристическое уравнение имеет вид: $4p^3 + 2p + 4 = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение 2-го порядка и все его коэффициенты положительны. Следовательно, исследуемая система устойчива.

Пример решения заданий типа 2

Исследуемая система имеет характеристическое уравнение 3-го порядка вида:

$$5p^3 + 2p^2 + p + 4 = 0 ,$$

где $5 = a_0$, $2 = a_1$, $1 = a_2$, $4 = a_3$.

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все его коэффициенты были > 0 и определитель $\Delta_{n-1} > 0$

.

Решение

Исходное характеристическое уравнение 3-го порядка имеет все коэффициенты > 0, следовательно, для оценки устойчивости системы надо определить знак Δ_2 .

Запишем определитель Гурвица для анализируемой системы:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Выделим из нее определитель Δ_2 и определим его знак:

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 20 < 0$$

Следовательно, исходная система неустойчива.

Критерий Гурвица позволяет определить изменение параметров исходного характеристического уравнения, которые сделают систему устойчивой.

Для того чтобы сделать $\Delta_2 > 0$, можно поменять коэффициенты исходного характеристического уравнения.

Так, сделав, например, значение $a_1 > 20$, получим $\Delta_2 > 0$ и, следовательно, анализируемая система будет устойчивой.

Этот же результат получим, если, например, в характеристическом уравнении, положить $a_0 = 1$, $a_1 > 4$.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Пример решения заданий типа 3 и типа 4

Пусть система имеет характеристический полином вида:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 3$, $a_3 = ?$, $a_4 = 1$.

Необходимо определить значение a_3, при котором система будет находиться на границе колебательной устойчивости.

<u>Решение</u>

Запишем в общем виде определитель этой системы:

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & & a_4 \end{pmatrix}$$

Выделим из этого определителя определитель третьего порядка Δ_3, в состав которого входит искомый параметр a_3, и приравняем Δ_3 к нулю:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Вычислим определитель Δ_3:

$$\Delta_3 = (-1)^2 a_1 \begin{vmatrix} a_2 a_4 \\ a_1 a_3 \end{vmatrix} + (-1)^3 a_3 \begin{vmatrix} a_0 a_4 \\ 0\ a_3 \end{vmatrix} + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} a_0 a_2 \\ 0\ a_1 \end{vmatrix} = a_1 \left| a_2 a_3 - a_1 a_4 \right| - a_3 \left| a_0 a_3 0 a_4 \right| = a_1 a_2 a_3 - a_1 a_4 a_1 - a_3 a_0 a_3 = 0$$

Подставляя значения коэффициентов, получим:

$$10 \cdot 3 a_3 - 10 \cdot 1 \cdot 10 - a_3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$$

Откуда получаем квадратное уравнение:

$$a_3^{\ 2} - 30 a_3 - 100 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно a_3, получаем:

$$a_3 \approx \pm 11.2$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Величину $a_3 \approx -11.2$ отбрасываем, т.к. наличие отрицательного коэффициента a_3 в характеристическом уравнении свидетельствует о неустойчивости анализируемой системы. Поэтому в качестве решения задачи принимаем $a_3 = +11.2$.

Следовательно, при значении $a_3 = 11.2$ система будет находиться на границе колебательной устойчивости.

Критерий Гурвица может использоваться для построения границ и области устойчивости.

Пусть существует характеристическое уравнение используемой системы вида:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Тогда для определения апериодических границ устойчивости необходимо положить $a_0 = 0$ и $a_n = 0$, и разделить их относительно параметра, соответствующего границе устойчивости.

Для определения колебательной границы устойчивости необходимо решить определитель $\Delta_{n-1} = 0$ и из него выделить параметр, определяющий колебательную границу и являющийся функцией одного из параметров области устойчивости. После чего, пользуясь правилом «штриховки», определить область устойчивости в плоскости заданных параметров.

Пример решения заданий типа 5

Передаточная функция статической автоматической системы регулирования в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(S) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)} , \qquad (1)$$

где $T_2 = 0,2$ с, $T_3 = 0,1$ с.

Построить область устойчивости замкнутой системы в плоскости параметров T_1 и K.

<u>Решение</u>

1) Исходя из передаточной функции (1), характеристическое уравнение *замкнутой* системы имеет вид:

$$(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) + K = 0 .$$

Подставляя в него исходные данные и раскрывая скобки, получаем

$$0,02\, T_1 s^3 + (0,02 + 0,3 T_1) s^2 + (0,3 + T_1) s + K + 1 = 0 \qquad (2)$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

2) Полагая $a_0 = 0$, из (2) запишем $0{,}02\,T_1 = 0$, тогда $T_1 = 0$. Так как $T_1 \geq 0$, то расположение области устойчивости относительно нее определено. Полагая $a_n = 0$ из (2) запишем $K_1 + 1 = 0$. Откуда $K_1 = -1$. Таким образом, границы апериодической устойчивости определены.

3) Найдем границу колебательной устойчивости. Так как (2) является уравнением 3-го порядка, то для отыскания границы колебательной устойчивости необходимо разрешить определитель Δ_2 относительно T_1 и построить функцию $K = f(T_1)$(можно наоборот!).

Запишем для (2) определитель Δ_2 для определения границы колебательной устойчивости.

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0{,}02 + 3T_1 & K + 1 \\ 0{,}02T_1 & 0{,}3 + T_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Разрешая (3) относительно K, получим:

$$K = \frac{(1 + 15\,T_1)(0{,}3 + T_1)}{T_1}.$$

4) Строим область устойчивости в плоскости параметров K и T_1 в соответствии с заданием.

Задаемся значениями T_1 от 0 до 0,6 (в зависимости от конкретно рассматриваемого объекта) и строим кривую $K = f(T_1)$, приведенную ниже.

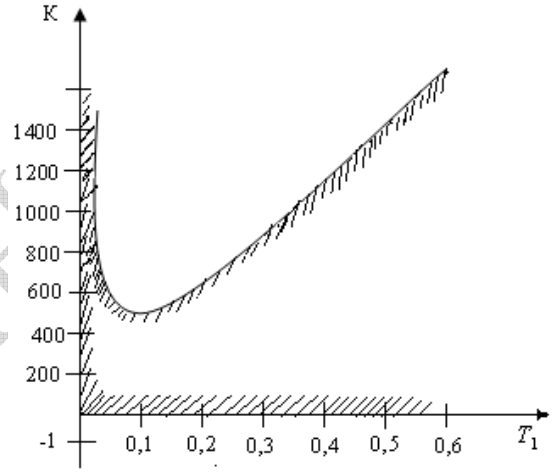


Рисунок 4 – Область устойчивости замкнутой системы в плоскости параметров T_1 и K

Для определения области устойчивости необходимо нанести штриховку. Из пункта (2) следует, что штриховка на осях параметров K и T_1 наносится, как показано на рисунке 4: кривую $K = f(T_1)$ надо штриховать вниз, иначе апериодические границы устойчивости $T_1 = 0$ и $K = -1$ не будут таковыми. Следовательно, область, ограниченная апериодическими и колебательной границей устойчивости, будет искомой.

Задание 2.2 Частотные критерии устойчивости

Определить, устойчива ли замкнутая система, если разомкнутая описывается дифференциальным уравнением вида

$$T_3 \frac{d^3x}{dt^3} + T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + a_n = b_0 y,$$

используя данные таблицы 4. Пояснить ход решения.

Таблица 4 – Варианты заданий

№ варианта	T_1, с	T_2, с	T_3, с	a_n	b_0
1	2	4	1	3	5
2	1	3	2	4	2
3	1	5	2	1	10
4	5	3	3	4	4
5	2	5	4	1	8
6	3	4	3	3	6
7	4	3	5	1	9
8	4	4	3	5	12
9	1	5	2	1	15
10	2	4	3	2	20
11	3	5	10	0,5	15
12	2	4	5	0,5	10
13	2	4	8	2	5
14	2	5	5	2	6
15	3	2	6	6	2
16	3	3	2	3	3
17	3	1	7	2	4
18	2	1	5	1	5
19	1	2	6	3	3
20	2	3	8	4	4
21	3	1	1	3	8
22	3	2	2	4	1
23	1	3	4	2	2
24	2	2	5	3	4
25	1	8	3	4	3

Пример выполнения контрольных заданий 2.2

Определить, будет ли устойчивой замкнутая система автоматического регулирования, если в разомкнутом состоянии она описывается дифференциальным уравнением вида:

$$T_3 \frac{d^3x}{dt^3} + T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 y \qquad \text{(I)}$$

Решение

1) Необходимо определить характеристическое уравнение системы (I)

$$T_3 p^3 + T_2 p^2 + T_1 + a_n = 0 \qquad \text{(II)}$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Пусть T_3=1с, T_2=2с, T_3=3с, $a_п$=2.

Проверяем устойчивость разомкнутой системы. Так как все коэффициенты (II) положительны, то ее устойчивость определяем по знаку Δ_2. $\Delta_2 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 > 0$.

Следовательно, разомкнутая система устойчива.

2) Проверяем выполнение условия устойчивости замкнутой системы по $\Delta \arg[1 + W(s)]_{\omega=0}^{\omega=+\infty}$ для статической системы, где $W(s)$ – амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, определяемая из (I)

$$W_{pc}(s) = \frac{b_0}{T_3 p^3 + T_2 p^2 + T_1 p + a_n} \qquad \text{(III)}$$

Положим b_0=20. Тогда, исходя из общих правил построения АФЧ, получим.

$$W_{pc}(j\omega) = \frac{20(1-15{,}25\omega^2)}{(1-15{,}25\omega^2)^2 + \omega^2(8-0{,}75\omega^2)^2} - j\frac{\omega(8-0{,}75\omega^2)}{(1-15{,}25\omega^2)^2 + \omega^2(8-0{,}75^2)^2} \qquad \text{(IV)}$$

В (IV) первое слагаемое вещественная составляющая, вторая – мнимая составляющая АФЧ (соответственно $P(\omega)$ и $Q(\omega)$).

Придавая в радианах значения для ω от 0 до $+\infty$, вычисляем $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и поточно, в координатных осях $P(\omega)$-$Q(\omega)$, строим АФЧ разомкнутой системы.

Количество значений ω не менее четырех, а далее – исходя из необходимости.

ωс$^{-1}$	0	0.05	0.1	0.15	0.25	0.3	0.4	0.5	10	∞
$P(\omega)$	20									0
$Q(\omega)$	0									0

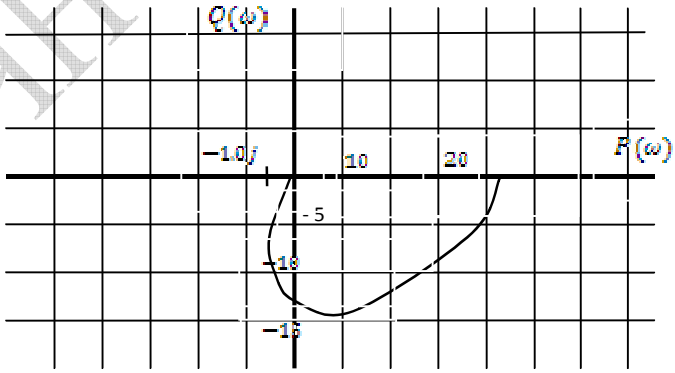


Рисунок 5 – АФЧ разомкнутой системы (I)

Из рисунка видно, что вектор $[1 + W(j\omega)]$начало которого лежит в точке $(-1, j\omega)$, при изменении частоты от 0 до $+\infty$, поворачивается на угол равный нулю, а соответствующая W(s) не охватывает эту точку, т.е. $\Delta \arg[1 + W(j\omega)]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = 0$ Следовательно, замкнутая система автоматического регулирования устойчива.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3

Контрольная работа № 3 состоит из 2-х заданий.

Задание 3.1 Управляемость и наблюдаемость

Задание типа 1. Определить, управляема ли система, если она задана уравнениями:

Вариант 1
$$\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 3u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 0 + x_2 + 0 + 4u_2 .$$

Вариант 2
$$\dot{x}_1 = 0 + 5x_2 + 3u_1 + 5u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 4u_1 + 0 .$$

Вариант 3
$$\dot{x}_1 = 4x_1 + 4x_3 + 5u_1 + 5u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_3 + 0 + 2u_2 .$$

Вариант 4
$$\dot{x}_1 = 0 + x_2 + 2u_1 + 5u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 4x_2 + 0 + 3u_2 .$$

Вариант 5
$$\dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 + 0 + 3u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 0 + 4x_2 + 3u_1 + 4u_2 .$$

Вариант 6
$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 5x_2 + 2u_1 + 2u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 0 + 3u_1 + 2u_2 .$$

Вариант 7
$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 + 6u_1 + 0 ,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 8x_2 + 4u_1 + 5u_2 .$$

Вариант 8
$$\dot{x}_1 = 10x_1 + 10x_2 + 3u_1 + 4u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + u_1 + u_2 .$$

Вариант 9
$$\dot{x}_1 = 8x_1 + 2x_2 + u_1 + 4u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 0 + x_2 + 0 + 5u_2 .$$

Вариант 10
$$\dot{x}_1 = 6x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 8u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3u_1 + 3u_2 .$$

Вариант 11
$$\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + 0 + 4u_2 ,$$
$$\dot{x}_2 = 0 + 5x_2 + u_1 + u_2 .$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Вариант 12 $\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 + 2u_1 + 3u_2$,
$\dot{x}_2 = 3x_1 + 3x_2 + 5u_1 + 4u_2$.

Вариант 13 $\dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 + u_1 + 5u_2$,
$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + 3u_1 + 2u_2$.

<u>Задание типа 2.</u> Определить, наблюдаемы ли системы, если они заданы системами уравнений (14-25). Решения пояснить.

Вариант 14 $\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 3u_2$,
$\dot{x}_2 = 0 + x_2 + 0 + 4u_2$.

Вариант 15 $\dot{x}_1 = 0 + 5x_2 + 3u_1 + 5u_2$,
$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 4u_1 + 0$.

Вариант 16 $\dot{x}_1 = 4x_1 + 4x_3 + 5u_1 + 5u_2$,
$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_3 + 0 + 2u_2$.

Вариант 17 $\dot{x}_1 = 0 + x_2 + 2u_1 + 5u_2$,
$\dot{x}_2 = 5x_1 + 4x_2 + 0 + 3u_2$.

Вариант 18 $\dot{x}_1 = x_1 + 5x_2 + 0 + 3u_2$,
$\dot{x}_2 = 0 + 4x_2 + 3u_1 + 4u_2$.

Вариант 19 $\dot{x}_1 = 2x_1 + 5x_2 + 2u_1 + 2u_2$,
$\dot{x}_2 = x_1 + 0 + 3u_1 + 2u_2$.

Вариант 20 $\dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 + 6u_1 + 0$,
$\dot{x}_2 = 3x_1 + 8x_2 + 4u_1 + 5u_2$.

Вариант 21 $\dot{x}_1 = 10x_1 + 10x_2 + 3u_1 + 4u_2$,
$\dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + u_1 + u_2$.

Вариант 22 $\dot{x}_1 = 8x_1 + 2x_2 + u_1 + 4u_2$,
$\dot{x}_2 = 0 + x_2 + 0 + 5u_2$.

Вариант 23 $\dot{x}_1 = 6x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 8u_2$,
$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3u_1 + 3u_2$.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Вариант 24 $\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + 0 + 4u_2$,
$\dot{x}_2 = 0 + 5x_2 + u_1 + u_2$.

Вариант 25 $\dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 + 2u_1 + 3u_2$,
$\dot{x}_2 = 3x_1 + 3x_2 + 5u_1 + 4u_2$.

Примеры выполнения контрольных заданий 3.1

Управляемость

Определить управляемость системы описываемой уравнением вида:

= +a + + .

= + +

Или в векторно-матричном виде:

=Ax+Bu,

где ; .

$AB = |$.

Тогда матрица управляемости будет иметь вид:

$Y = |BAB$.

Теперь, если b ≠ 0, то ранг матрицы управляемости равен 2 и n=2. Следовательно, исходная система вполне управляема.

Если b=0, то ранг матрицы равен 1, то система не вполне управляема – она управляема только по одной координате.

Наблюдаемость

Имеем систему = = y =C + .

Запишем ее в канонической форме в виде:

$\dot{x}_1 = x_2;$
$\dot{x}_2 = u;$
$y = Cx_1 + x_2.$

Для данной системы:

;

$$CA = |C, 1| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 + C & C \cdot 1 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 0 \end{vmatrix} = |0 \quad C|.$$

тогда .

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Если C ≠0, то ранг матрицы следовательно система (12.56-12.58) наблюдаема.

Если C = 0, то ранг матрицы система (12.56-12.58) не вполне наблюдаема.

Задание 3.2 Математические модели. Структурный метод

Изобразить структурную схему системы, модель которой описывается системой дифференциальных уравнений:

Вариант 1
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + u, \\ &y = x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Вариант 2
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2u, \\ &y = 2x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Вариант 3
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5u, \\ &y = 5x_1 + x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Вариант 4
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = 3x_1 - 3x_2 + 3u, \\ &y = 4x_1 + x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

Вариант 5
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = -3x_2 + 5x_3 + u, \\ &y = 3x_1 + 3x_2 - 3x_3. \end{aligned}$$

Вариант 6
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = 5x_1 + x_3 + 8u, \\ &y = 3x_1 + 2x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Вариант 7
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - x_3 + 4u, \\ &y = x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Вариант 8
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + u, \\ &y = 2x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{aligned}$$

Вариант 9
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = -x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2u, \\ &y = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3. \end{aligned}$$

Вариант 10
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2u, \\ &y = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

Вариант 11
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = -x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6u, \\ &y = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Вариант 12
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3 + 5u, \\ &y = x_1 + x_2 - 6x_3. \end{aligned}$$

Вариант 13
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = 2x_2 + 2u, \\ &\dot{x}_2 = x_3 + 3u, \\ &\dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5u, \\ &y = x_1. \end{aligned}$$

Вариант14
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = 3x_2 + 3u, \\ &\dot{x}_2 = 3x_3 + 2u, \\ &\dot{x}_3 = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3u, \\ &y = x_1. \end{aligned}$$

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Вариант 15
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2 + 4u,\\&\dot{x}_2 = 5x_3 + 8u,\\&\dot{x}_3 = 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 4u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 16
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 5x_2 + 4u,\\&\dot{x}_2 = 8x_3 + u,\\&\dot{x}_3 = x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 17
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u,\\&\dot{x}_2 = 4x_3 + 4u,\\&\dot{x}_3 = x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 18
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 4x_2 + 4u,\\&\dot{x}_2 = x_3 + u,\\&\dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 19
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u,\\&\dot{x}_2 = x_3 + 10u,\\&\dot{x}_3 = -4x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 10u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 20
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2 + 2u,\\&\dot{x}_2 = x_3 + 3u,\\&\dot{x}_3 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 21
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2 + 3u,\\&\dot{x}_2 = 2x_3 + 2u,\\&\dot{x}_3 = 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 22
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 3x_2 + 0.5u,\\&\dot{x}_2 = 5x_3 + 1.5u,\\&\dot{x}_3 = -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 23
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 5x_2 + 5u,\\&\dot{x}_2 = 3x_3 + 2u,\\&\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - x_3 + u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 24
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 4x_2 + u,\\&\dot{x}_2 = x_3 + u,\\&\dot{x}_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Вариант 25
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = 2x_2 + 2u,\\&\dot{x}_2 = 4x_3 + 3u,\\&\dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4u,\\&y = x_1.\end{aligned}$$

Пояснить, какой вид модели используется и порядок построения структурной схемы.

Примеры выполнения контрольных заданий 3.2

Изобразить структурную схему системы, модель которой описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 5x_2.\\\dot{x}_2 &= -4x_1 + 3x_2 + 2u.\\y &= x_1 + 2x_2.\end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнения состояния, получим:

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (-2x_1 + 5x_2)dt.$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (-4x_1 + 3x_2 + 2u)dt.$$

$$y = x_1 + 2x_2.$$

В соответствии с этой системой уравнений структурную схему исходной системы можно представить в виде:

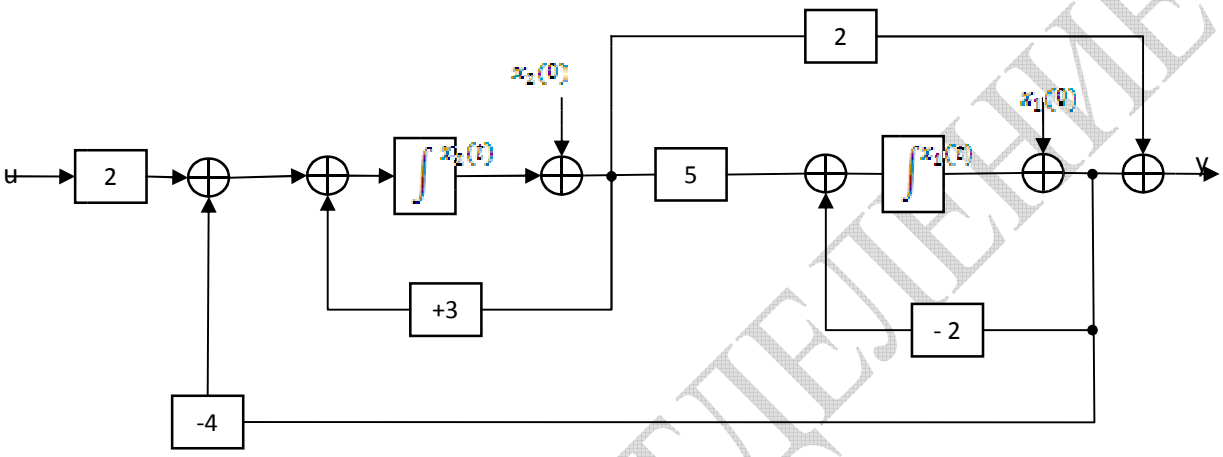


Рисунок 6 – Иллюстрация структурной схемы к уравнениям состояния и выхода

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1 Пупков, К. А., Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / К. А. Пупков, А .И. Баркин, Е .М. Воронов и др.- М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.

2 Душин, С. Е., Теория автоматического управления / С. Е. Душин, Н.С. Зотов, Д. Х. Имаев.- М. : Высшая школа, 2005.

3 Мирошник, И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / М-Минск. : Питер, 2005.

4 Савин, М. М., Теория автоматического управления / М. М. Савин, В. С. Елсуков, О. Н. Пятина. - Ростов- на- Дону : Феникс, 2007.

5 Воронов, А. А. Основы теории автоматического управления. Часть I / А. А. Воронов. - М.-Л. : Энергия, 1965.

6 Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е.П.Попов. - М. : Наука ФМЛ, 1966.

7 Востриков, А. С. Теория автоматического управления / А. С. Востриков, Г. А. Французова. - М. : Высшая школа, 2004.

8 Воронов, А. А. Теория автоматического управления. Часть II / А. А. Воронов. - М. : Высшая школа, 1984.

9 Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. - М. : Машиностроение, 1985.

10 Пупков, К. А. Синтез регуляторов систем автоматического управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов, И. Г. Владимиров. - М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004.

11 Ротач. В. Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования / В. Я. Ротач. - М. : Энергия, 1973.

12 Староверов, Б. А. Цифровые системы управления технологическими объектами / Б. А. Староверов. – Кострома, 2005.

13 Острем, К. Системы управления с ЭВМ / К. Острем, В. Виттенмарк. - М. : Мир, 1987.

14 Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. - М.: «Машиностроение», 1986.

15 Толковый словарь по вычислительным системам / под редакцией В. П. Лменгуорта, Э. Л. Глейзера, Н.К.Пайла. - М. : Машиностроение, 1989.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

16 Бесекерский, В. А. Микропроцессорные системы автоматического управления / В. А. Бесекерский, Н. Б. Ефимов, С. И. Зиатдинов. - М. : Машиностроение, 1984.

17 Изерман, Р. И. Цифровые системы управления / Р. И. Изерман. - М. : Мир, 1984.

18 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г. М. Фихтенгольц. - Москва. : Наука, 1969.

19 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - Москва. : Наука, 1968.

20 Блюмин, О. Л. Математические основы анализа линейных импульсных и цифровых систем / О. Л. Блюмин, О. П. Околелов, Н. Ф. Полинчак. - Липецк.: 1999.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки
«Информатика и вычислительная техника»

Основы теории управления

Владимир Васильевич Сотников
Лариса Федоровна Макарова

Отпечатано с оригинал макета. Формат 60x90 1/16
Печ. л. 2,5. Тираж 100 экз. Заказ №

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

190013, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ