Задача 3.2

Задача посвящена временному и частотному (спектральному) методам расчета реакции цепей на сигналы произвольной формы. В качестве такого сигнала используется импульс прямоугольной формы (видеоимпульс).

Электрические схемы цепей (рис. 3.6) содержат емкости *C* или индуктивности *L*, а также сопротивления *R*. Для всех вариантов $R_2 = 3R_1$. В схемах, где имеется сопротивление R_3, его величина $R_3 = 0{,}2R_1$. Во всех схемах входным напряжением $u_1(t)$ является прямоугольный импульс длительностью t_u и амплитудой U_1.

1. Перерисуйте схему (рис. 3.6). Выпишите исходные (таблица 4).

Таблица 4

С, пф или *L*, мкГн	R_1, кОм	t_u, нс	U_1, В
20	1	30	3

Временной метод расчета

2. Рассчитайте переходную $g_2(t)$ и импульсную $h_2(t)$ характеристики цепи по напряжению классическим или операторным методами (по выбору).

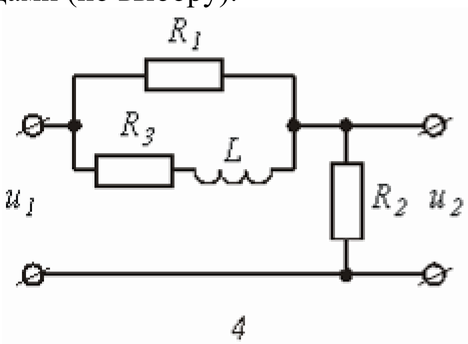

Рис.3.6

3. Рассчитайте реакцию цепи в виде выходного напряжений $u_2(t)$ используя:
- интеграл Дюамеля;
- интеграл наложения.

4. Постройте временные диаграммы входного и выходного напряжений.

Частотный метод расчета

5. Рассчитайте комплексные спектральные плотности входного $U_1(j\omega)$ и выходного $U_2(j\omega)$ сигналов.

6. Рассчитайте и постройте графики модулей $|U_1(j\omega)| = U_1(\omega)$, $|U_2(j\omega)| = = U_2(\omega)$ и модуля комплексной передаточной функции цепи $|H(j\omega)| = H(\omega)$, как функций от циклической частоты *f* в диапазоне частот 0 - $3/t_u$.

Пример решения типовой задачи Т3.2

Схема цепи, приведенная на рис. 3.7 *а*, содержит емкость *C* = 10 пф и сопротивления R_1 = 1 кОм, $R_2 = 3R_1$ = 3 кОм. На входе цепи действует прямоугольный импульс (рис. 3.8) длительностью t_u = 60 нс и амплитудой U_1 = 4 В. Выполнить расчеты в соответствии с заданием к задаче 3.2.

Решение

1. Расчет переходной и импульсной характеристик классическим методом.

1.1. Переходная характеристика цепи рассчитывается, как переходной процесс в виде тока или напряжения, вызванный включением цепи с нулевыми начальными условиями на постоянное напряжение 1 В. В соответствие с этим составляется схема включения (рис. 3.7 *б*) *,* на которой *E* = 1 В. В задаче определяется переходная характеристика $g_2(t)$ по напряжению относительно выходного контура R_2C, поэтому можно записать, что:

$$g_2(t) = u_{R_2}(t) + u_C(t) = R_2 i(t) + u_C(t) = R_2 C \frac{du_C}{dt} + u_C(t)$$, (3.11)

Напряжение $R_2=3R_1$ в схеме на рис. 3.7 *б* может быть рассчитано с помощью общей формулы (3.3) расчета переходных процессов в схемах первого порядка:

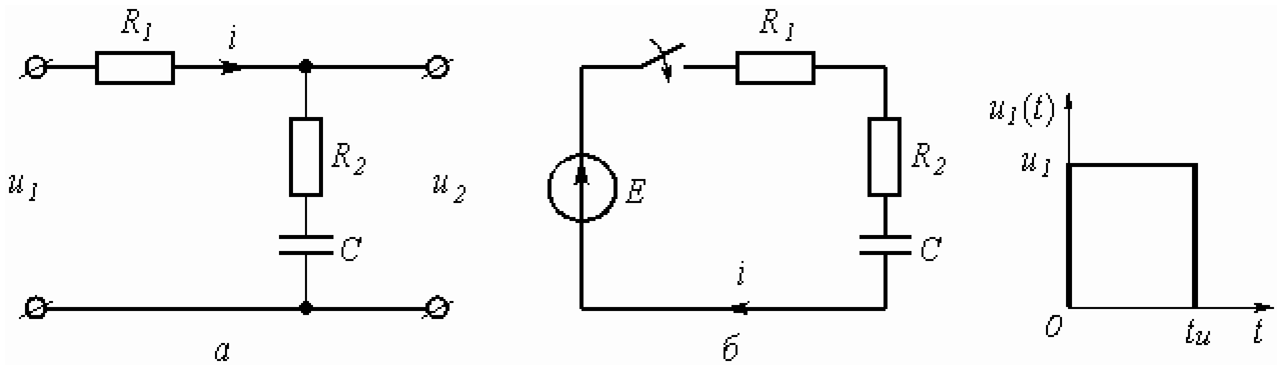

Рис.3.7

$$u_C(t) = u_{C.np} + Ae^{pt}$$,

где $u_{C.np} = u_C(\infty)$= 1 В; *p* – корень характеристического уравнения, находится из операторного сопротивления схемы $Z(p) = R_1 + R_2 + 1/pC$, и равен $p = 1/(R_1 + R_2)C$; постоянная интегрирования находится из рассмотрения $u_C(t)$ при $t = 0_+$:

$u_C(0_+) = u_{C.np} + A = 0$ (нулевое начальное условие).

Откуда $A = -u_{C.np} = -1$.

Окончательно

$$u_C(t) = 1 - 1e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = 1 - e^{-\frac{t}{40\cdot 10^{-9}}}$$,

где $\tau_1 = 40 \cdot 10^{-9}\ C$ – постоянная времени цепи.

Подставляя $R_2=3R_1$ в (3.11), получим:

$$g_2(t) = R_2 C \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} =$$

$$= \mathbf{1 - 0{,}25} e^{-\frac{t}{40\cdot 10^{-9}}}.$$ (3.12)

Обратить внимание, что $g_2(t)$ в (3.12) определяется только элементами цепи и не зависит ни от токов, ни от напряжений.

1.2 Импульсная характеристика цепи *h*(*t*) есть производная от переходной характеристики *h*(*t*) = *g¢* (*t*). Однако следует учесть, что, если переходная характеристика отлична от нуля при *t* = 0, т.е. имеет скачок при *t* = 0, то при дифференцировании появляется дополнительное слагаемое:

h(*t*) = g(0)d (*t*) + *g¢* (*t*).

В рассматриваемой задаче $g_2(0)$= 0,75, поэтому

$$h_2(t) = 0{,}75\delta(t) + 6{,}25 \cdot 10^6 e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}}$$, (3.13)

где d (*t*) – импульсная функция (функция Дирака).

2. Расчет выходного напряжения $u_2(t)$ временным методов.

2.1. Использование интеграла Дюамеля.

Из известных четырех формул интеграла Дюамеля наиболее общий характер имеет формула вида

$$u_2(t) = u_1(0)g_2(t) + \int_0^t u_1'(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \qquad (3.14)$$

в обозначениях величин и понятий, принятых в рассматриваемой задаче. Переменной интегрирования в (3.14) является t (не путать с постоянной времени τ_1).

Входное напряжение $u_1(t)$ имеет форму прямоугольного импульса (рис. 3.8), аналитическая запись которого может быть представлена как

$$u_1(t) = \begin{cases} U_1 & \textbf{при } 0 \le t \le t_u \\ 0 & \textbf{при } t \ge t_u. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что $u_1(0) = U_1$ и что производная $u_1'(t)$= 0 или для переменной $\tau - u_1'(\tau)$= 0.

Число участников интегрирования в (3.14) определяется числом участков в функции, описывающей входной сигнал, в которых она непрерывна и дифференцируема [1, с. 188]. Для функции (3.15) таких участков в виде интервалов времени два: $0 \le t < t_u$ и $t_u \le t < \infty$. Необходимость учета второго участка, когда $u_1(t) = 0$, объясняется тем, что за время действия импульса в реактивных элементах цепи накапливается энергия электрического и магнитного полей, которая после окончания импульса постепенно убывает до нуля, создавая напряжение и токи в цепи. Анализ этих величин и проводится в интервале $t \ge t_u$.

Важнейшей характерной особенностью аппарата интеграла Дюамеля является то, что при записи реакции цепи на каждом новом интервале времени наличие скачкообразного изменения входного сигнала в начальный момент рассматриваемого интервала учитывается дополнительным слагаемым вида

$\Delta U g(t - t_\kappa)$,

где D *U* – амплитуда скачка;

t_κ – момент действия скачка.

Учитывая сказанное, запишем выходное напряжение цепи в соответствие с (3.14) и (3.12):

для интервала времени $0 \le t < t_u$

$$u_2(t) = U_1 g_2(t) + \int_0^t \mathbf{0} \cdot g_2(t-\tau)d\tau = \mathbf{4} \cdot \left(\mathbf{1 - 0{,}25}\, e^{-25 \cdot 10^6 t}\right) = \mathbf{4} - e^{-25 \cdot 10^6 t}. \qquad (3.16)$$

для интервала времени $t_u \le t < \infty$

$$u_2(t) = U_1 g_2(t) + \int_0^{t_u} \mathbf{0} \cdot g_2(t-\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau} - U_1 g_2(t - t_u) =$$

$$= \mathbf{4} \cdot \left(\mathbf{1 - 0{,}25}\, e^{-25 \cdot 10^6 t}\right) - \mathbf{4} \cdot \left(\mathbf{1 - 0{,}25}\, e^{-25 \cdot 10^6 (t - t_u)}\right) = \mathbf{3{,}48}\, e^{-25 \cdot 10^6 t}. \qquad (3.17)$$

2.2. Использование интеграла наложения.

В отличие от интеграла Дюамеля в интеграле наложения не учитываются дополнительными слагаемыми скачки входного напряжения:

$$u_2(t) = \int_0^t U_1(\tau) \cdot h_2(t-\tau)d\tau$$, (3.18)

С учетом (3.13) реакция (3.18) заданной цепи на прямоугольный импульс будет равна:

для интервала времени $0 \le t < t_u$

$$u_2(t) = \int_0^t U_1 \left[0{,}75\,\delta(\tau) + 6{,}25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau ,$$

Используя фильтрующее свойство импульсной d -функции [1. стр. 173], получим

$$u_2(t) = 4 \cdot 0{,}75 + 4\int_0^t 6{,}25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} d\tau = 4 - e^{-25 \cdot 10^6 t} ,$$

Для интервала времени $t_u \le t < \infty$

$$u_2(t) = \int_0^{t_u} U_1 \left[0{,}75\,\delta(\tau) + 6{,}25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau +$$

$$+ \int_{t_u}^{t} \left[(0 - U_1) 0{,}75\,\delta(\tau - t_u) + 0 \cdot 6{,}25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= 4 \cdot 0{,}75 + \left(e^{25 \cdot 10^6 t_u} - 1 \right) e^{-25 \cdot 10^6 t} - 4 \cdot 0{,}75 = 3{,}48 e^{-25 \cdot 10^6 t} .$$

Сравнение результатов расчетов напряжения $u_2(t)$ с использованием интегралов наложения и Дюамеля показывает, что они совпадают между собой.

3. Построение временной диаграммы входного и выходного напряжений.

Диаграмма выходного напряжения строится с использованием формул (3.16) и (3.17) путем подстановки в них соответствующих моментов времени. Результаты расчетов сводятся в таблицу 5.

Таблица 5

Время,	0	$0{,}3t_u$	$0{,}6t_u$	t_{u-}	t_{u+}	$t_u + \tau_1$	$t_u + 2\tau_1$	$t_u + 3\tau_1$
нс	0	18	36	60	60	100	140	180
u_1, В	4	4	4	4	0	0	0	0
u_2, В	3	3,4	3,6	3,8	0,8	0,28	0,03	0,01

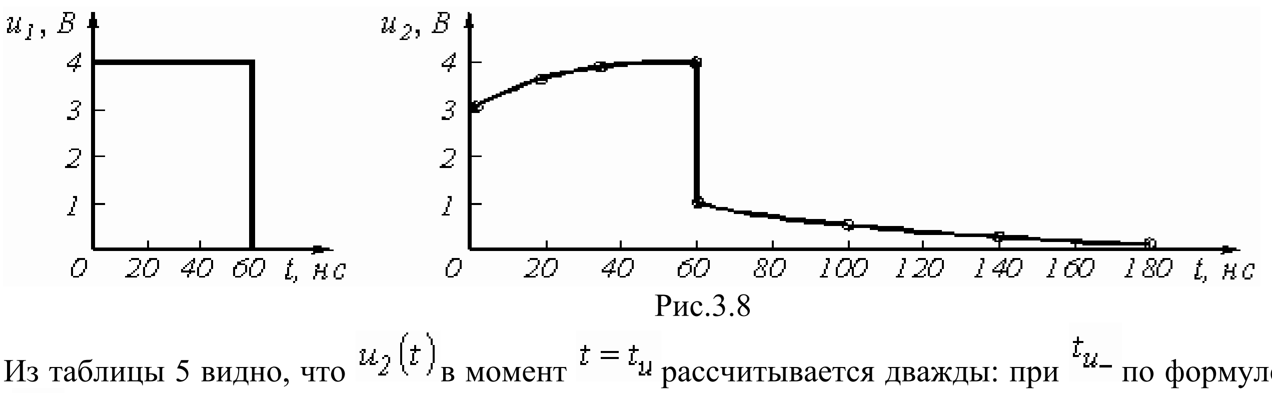

Рис.3.8

Из таблицы 5 видно, что $u_2(t)$ в момент $t = t_u$ рассчитывается дважды: при t_{u-} по формуле (3.16), а при t_{u+} по формуле (3.17). Именно при такой методике можно определить будет ли скачкообразное изменение в форме выходного сигнала в момент изменения функции, описывающей входной сигнал, как это и показано в рассматриваемом примере.

Выбор расчетных точек в интервале $t > t_u$ определяется временем затухающего переходного процесса, которое зависит от постоянной времени цепи, равной $\tau_1 = (R_1 + R_2)C = (1+3)10^3 \cdot 10^{-11}$ = 40 нс.

Временные диаграммы входного и выходного напряжений показаны на рис. 3.9.

4. Расчет комплексной спектральной плотности входного $U_1(j\omega)$ и выходного $U_2(j\omega)$ сигналов.

Для расчета комплексной спектральной плотности непериодического сигнала $f(t)$ произвольной формы используется прямое преобразование Фурье:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt.$$

Для заданного входного сигнала (3.15) преобразование Фурье дает выражение

$$U_1(j\omega)=\int_0^{t_u} U_1\, e^{-j\omega t}\,dt=\frac{U_1}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega t_u}\right),$$

которое после преобразований (в контрольной работе показать эти преобразования) принимает более удобную форму

$$U_1(j\omega)=\frac{2U_1}{\omega}\sin\frac{\omega t_u}{2}e^{-j\frac{\omega t_u}{2}}=U_1 t_u\frac{\sin\frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}}e^{-j\frac{\omega t_u}{2}}. \qquad (3.19)$$

Комплексная спектральная плотность выходного сигнала находится по формуле

$$U_2(j\omega)=H(j\omega)\cdot U_1(j\omega), \qquad (3.20)$$

где $H(j\omega)$ – комплексная передаточная функция цепи по напряжению. Функция $H(j\omega)$ находится как отношение комплексного значения гармонического напряжения $\underline{U}_2$ на выходе цепи к комплексному значения гармонического напряжения $\underline{U}_1$ той же частоты, приложенному ко входу цепи:

$$H(j\omega)=\underline{U}_2/\underline{U}_1.$$

Для схемы, приведенной на рис. 3.7 *а* легко получить:

$$\underline{U}_2=\left(R_2-j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}=\left(R_2-j\frac{1}{\omega C}\right)\frac{\underline{U}_1}{R_1+R_2-j\frac{1}{\omega C}}.$$

Тогда

$$H(j\omega)=\frac{R_2-j\frac{1}{\omega C}}{R_1+R_2-j\frac{1}{\omega C}}=\frac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega(R_1+R_2)C}. \qquad (3.21)$$

Анализ (3.21) позволяет сделать вывод, что комплексная передаточная функция цепи по напряжению определяется только элементами цепи и является безразмерной величиной.

Используя (3.19) и (3.21), находим по (3.20) спектральную плотность выходного сигнала:

$$U_2(j\omega)=\frac{2U_1(1+j\omega R_2C)}{\omega[1+j\omega(R_1+R_2)C]}\sin\frac{\omega t_u}{2}e^{-j\frac{\omega t_u}{2}}. \qquad (3.22)$$

5. Расчет графиков модулей $|U_1(j\omega)|$, $|H(j\omega)|$ и $|U_2(j\omega)|$.

Из выражений (3.19), (3.21) и (3.22) легко получить модули: спектральной плотности входного напряжения

$$U_1(\omega)=|U_1(j\omega)|=\frac{2U_1}{\omega}\left|\sin\frac{\omega t_u}{2}\right|; \qquad (3.23)$$

комплексной передаточной функции (амплитудно-частотная характеристика цепи)

$$H(\omega)=|H(j\omega)|=\sqrt{\frac{1+(\omega R_2C)^2}{1+\omega^2(R_1+R_2)^2C^2}}; \qquad (3.24)$$

спектральной плотности выходного напряжения

$$U_2(\omega)=\left|U_2(j\omega)\right|=\frac{2U_1}{\omega}\sin\frac{\omega t_u}{2}\sqrt{\frac{1+(\omega R_2 C)^2}{1+\omega^2(R_1+R_2)^2C^2}} \quad . \quad (3.25)$$

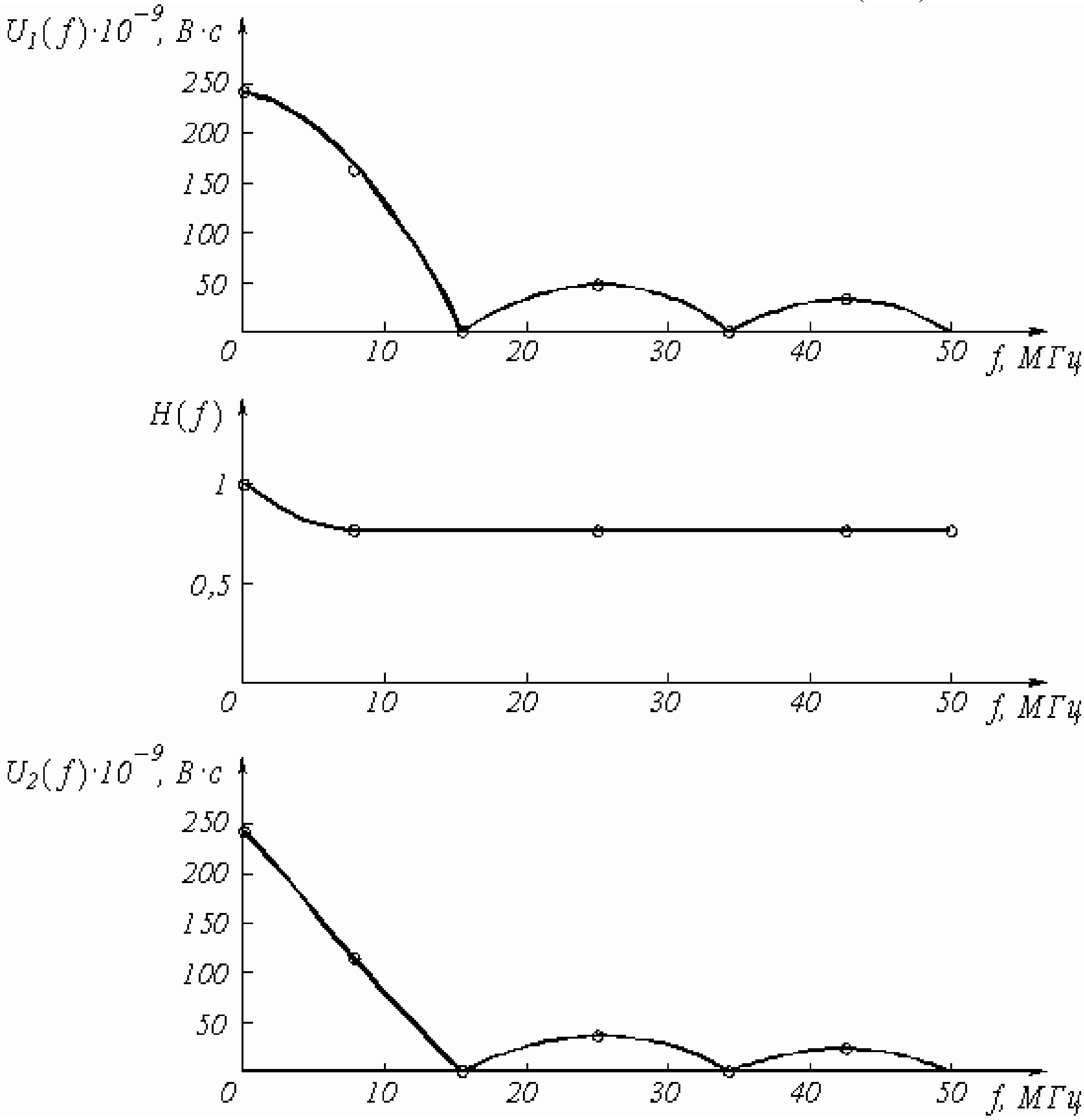

Рис.3.10

Для построения графиков полученных функций необходимо выбрать расчетные точки по частоте. Учтем, что спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса измеряется в вольт × секундах [B × c] и что она обращается в ноль на частотах $f = 1/t_u\ ,\ 2/t_u\ ,\ 3/t_u$ и т.д. Поэтому дополнительно выбираются промежуточные точки между этими частотами. Максимальная частота в соответствие с заданием равна $3/60 \times 10^{-9} = 50 \times 10^{6}$ Гц = 50 МГц. Результаты расчетов по (3.23) ¸ (3.25) сводим в таблицу 6.

Таблица 6

f, МГц	$\omega\cdot 10^6$, рад/с	$U_1(\omega)\cdot 10^{-9}$, B × c	$H(\omega)$	$U_2(\omega)\cdot 10^{-9}$, B × c
0	0	240	1	240
8,3	52,1	153	0,75	115
16,6	104,2	0	0,75	0
24,9	157	51	0,75	38
33,3	209	0	0,75	0

41,6	261	31	0,75	23
50	314	0	0,75	0

По данным таблицы 6 строим графики (рис. 3.10).