Задание контрольной работы и методические указания к выполнению

Задание 2

Кинематика твердого тела

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

Движение груза *1* должно описываться уравнением

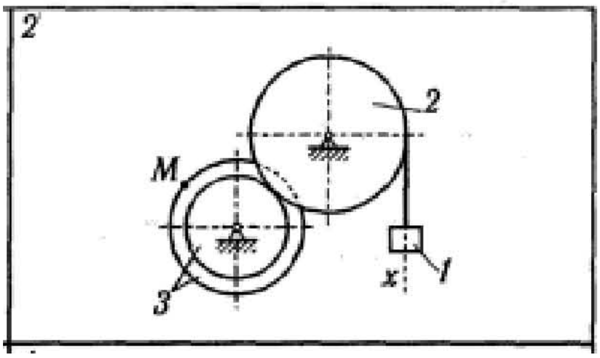
$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \qquad (1)$$

где t – время, с; c_0, c_1, c_2 – некоторые постоянные.

В начальный момент времени ($t = 0$) положение груза определяется координатой x_0, и он имеет скорость υ_0. Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени $t = t_2$ была равна x_2.

Определить коэффициенты c_0 , c_1 , c_2 , при которых осуществляется требуемое движение груза *1*. Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза и точки M одного из колес механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 1 – 3, а необходимые данные приведены в таблице 1.



Пример и методика выполнения задания. Дано: схема механизма (рис. 4); $R_2 = 50$ см, $r_2 = 25$ см, $R_3 = 65$ см, $r_3 = 40$ см, $x_0 = 14$ см, $\upsilon_0 = 5$ см/с, $x_2 = 168$ см, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с.

Найти уравнение движения груза, а также скорости и ускорения груза и точки M в момент времени $t = t_1$.

Решение: Уравнение движения груза *1* имеет вид

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0. \qquad (1)$$

Номер варианта (рис. 1-3)	Радиусы, см				Координаты и скорости груза 1			Расчетные моменты времени, c	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0, см	υ_0, см/с	x_2, см	t_2	t_1
2	80	–	60	45	5	10	41	2	1

Пример и методика выполнения задания. Дано: схема механизма (рис. 4); $R_2 = 50$ см, $r_2 = 25$ см, $R_3 = 65$ см, $r_3 = 40$ см, $x_0 = 14$ см, $\upsilon_0 = 5$ см/с, $x_2 = 168$ см, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с.

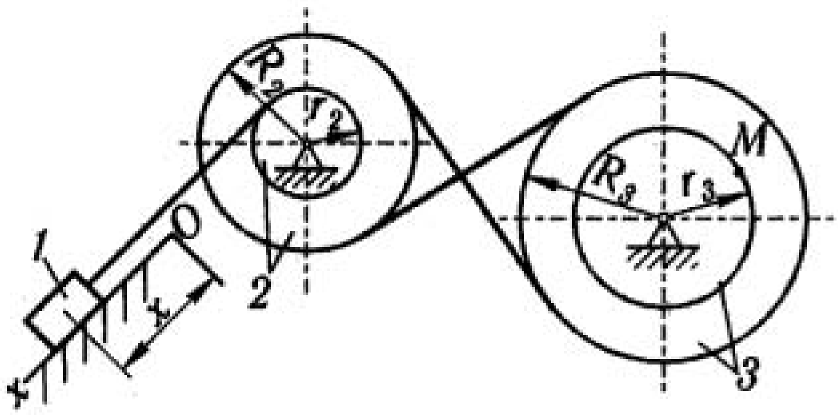


Рис. 4

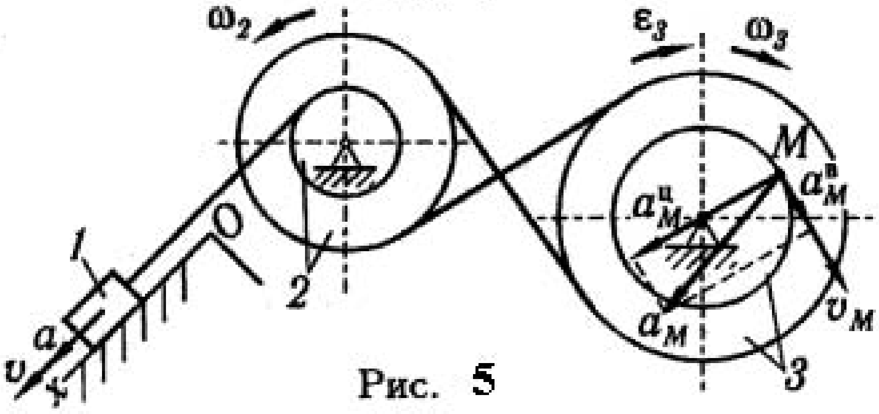


Рис. 5

Найти уравнение движения груза, а также скорости и ускорения груза и точки M в момент времени $t = t_1$.

Решение: Уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = c_2t^2 + c_1t + c_0. \qquad (1)$$

Коэффициенты c_0, c_1, и c_2 могут быть определены из следующих условий:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 14 \text{ см}, \qquad \dot{x}_0 = 5 \text{ см/с}, \qquad (2)$$

$$\text{при } t_2 = 2 \text{ с} \qquad x_2 = 168 \text{ см}. \qquad (3)$$

Скорость груза 1

$$\upsilon = \dot{x} = 2c_2t + c_1. \qquad (4)$$

Представляя (2) и (3) в формулы (1) и (4), находим коэффициенты

$$c_0 = 14 \text{ см}, \qquad c_1 = 5 \text{ см/с}, \qquad c_2 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1

$$x = 36t^2 + 5t + 14 \qquad (5)$$

Скорость груза 1

$$\upsilon = \dot{x} = 72t + 5. \qquad (6)$$

$$x = 36t^2 + 5t + 14 \qquad (5)$$

Скорость груза 1

$$\upsilon = \dot{x} = 72t + 5 \qquad (6)$$

Ускорение груза 1

$$a = \ddot{x} = 72 \text{см}/\text{с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колес ω_2 и ω_3.

В соответствии со схемой механизма

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= r_2\omega_2 \\ R_2\omega_2 &= R_3\omega_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

откуда

$$\omega_3 = \upsilon R_2/(r_2 R_3),$$

или с учетом (6) после подстановки данных

$$\omega_3 = 2{,}215t + 0{,}154.$$

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2{,}215 \text{рад}/\text{с}^2.$$

Скорость точки M, её вращательное, центростремительное и полное ускорения определяются по формулам

$$\upsilon_М = r_3\omega_3;$$

$$a_М^В = r_3\varepsilon_3; \qquad a_М^Ц = r_3\omega_3^2;$$

$$a_М = \sqrt{(a_М^Ц)^2 + (a_М^В)^2}.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1 = 1$ с приведены в табл. 2.

Скорости и ускорения тела l и точки M показаны на рис. 5

Таблица 2

υ, *см/с*	a, *см/с*^{2}	ω_3, *рад/с*	ε_3, *рад/с*^{2}	υ_M, *см/с*	$a_M^Ц$, *см/с*^{2}	a_M^E, *см/с*^{2}	a_M, *см/с*^{2}
77	*72*	*2,37*	*2,22*	*94,8*	*224*	*88,6*	*241*

Задание 3

Динамика материальной точки

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

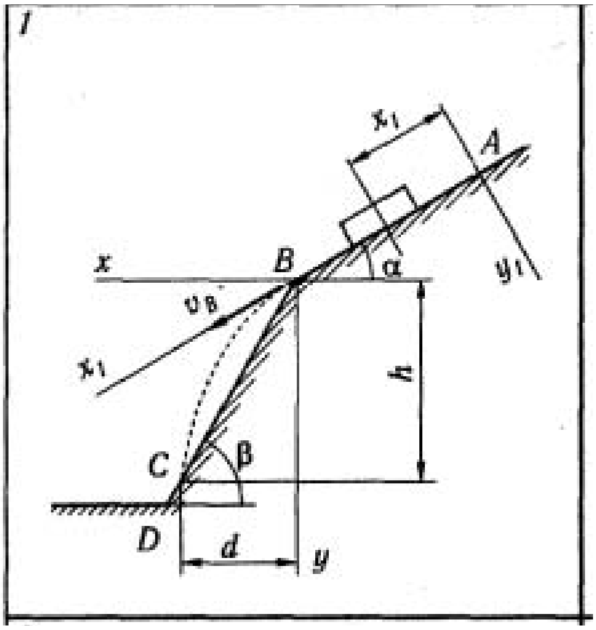
Задание Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под воздействием постоянных сил.

Варианты 1 – 5 (рис. 1, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость υ_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью υ_B и попадает со скоростью υ_C в точку C плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T *с*.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15°$; $\upsilon_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; h = 4 м; $\beta = 45°$. Определить l и уравнение траектории точки на участке *BC*.



Пример и методика выполнения задания (рис. 2). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки А откоса и полагая при этом его начальную скорость $\upsilon_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость υ_C,
с которой камень падает на нее. По участку АВ откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется τ с.
При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке АВ постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.
Дано: $\upsilon_A = 0$; $\alpha = 60°$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; h = 5 м; $\beta = 75°$. Определить b и υ_C.
Решение. Рассмотрим движение камня на участке АВ. Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 2) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке АВ:

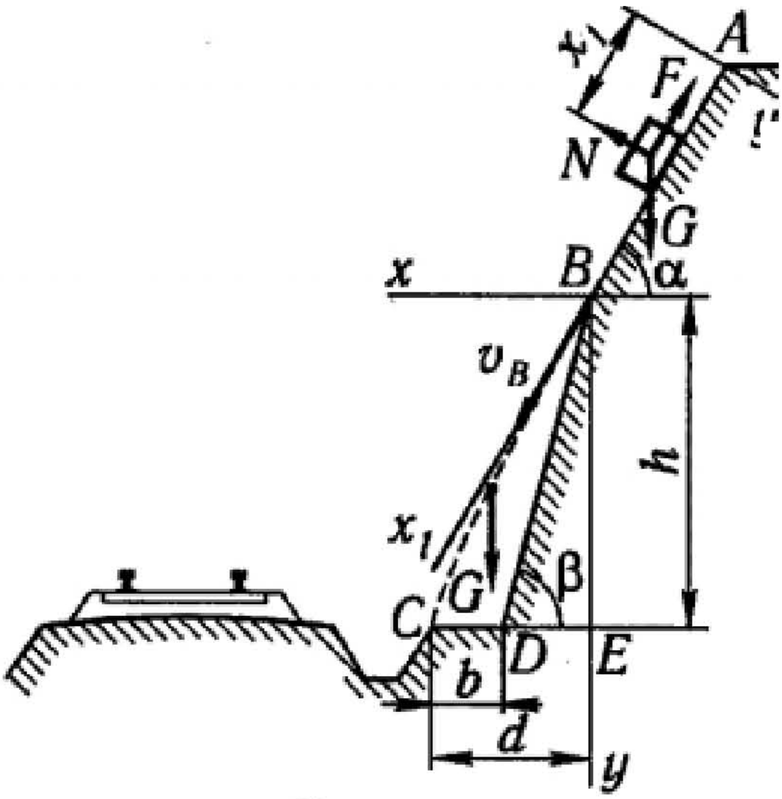


Рис. 2

$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}$; $\quad m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha -$

Сила трения:

$$F = fN,$$

где

$$N = G\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1;$$
$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\, t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$, $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$[*].

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \qquad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0; \qquad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t;$$
$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\, t^2.$$

Для момента τ, когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = \upsilon_B; \qquad x_1 = l,$$

т.е.

$$\upsilon_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau;$$
$$l = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\, \tau^2,$$

откуда

$$\upsilon_B = 2l / \tau,$$

т. е.

$$\upsilon_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C.

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \qquad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$;

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = \upsilon_B \cos\alpha; \qquad y_0 = \upsilon_B \sin\alpha.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3 \qquad \dot{y} = gt + C_4;$$
$$x = C_3 t + C_5; \qquad y = gt^2/2 + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3; \quad \dot{y}_0 = C_4;$$
$$x_0 = C_5; \quad y_0 = C_6;$$

Отсюда найдем, что

$$C_3 = \upsilon_B \cos\alpha; \qquad C_4 = \upsilon_B \sin\alpha;$$

---

[*] Постоянные интегрирования $C_1 - C_6$ во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

$C_5 = 0;$ $\qquad\qquad$ $C_6 = 0.$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = \upsilon_B \cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + \upsilon_B \sin\alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = \upsilon_B \cos\alpha\cdot t, \qquad y = gt^2 / 2 + \upsilon_B \sin\alpha\cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2 / (2\upsilon^2_B \cos^2\alpha) + x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2{,}11 \text{ м}, \qquad d_2 = -7{,}75 \text{ м}.$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2{,}11$ м.

Минимальная ширина полки

$$b = d - Ed = d - h / \mathrm{tg}75^\circ, \quad \text{или } b = 0{,}77 \text{ м}.$$

Используя уравнение движения камня $x = \upsilon_B \cos\alpha\cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C:

$$T = 0{,}53 \text{ с}.$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на
оси координат

$$\dot{x} = \upsilon_B \cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + \upsilon_B \sin\alpha$$

по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0{,}53$ с

$$\upsilon_C = \sqrt{(\upsilon_B \cos\alpha)^2 + (gT + \upsilon_B \sin\alpha)^2},$$

или

$$\upsilon_C = 12{,}8 \text{ м / с}.$$