

#### Задание 4.

### Сопротивление материалов

#### Пример и методика выполнения задания по сопротивлению материалов

Дано:

$$P = 100\text{H}, l = 1200\text{мм}, \mathcal{M} = \frac{2 \cdot P \cdot l}{3} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 1200}{3} = 80000\text{H} \cdot \text{мм} = 80\text{кН} \cdot \text{мм},$$

$$q = \frac{3 \cdot P}{l} = \frac{3 \cdot 100}{1200} = 0,25 \frac{\text{H}}{\text{мм}}, [\sigma] = 120 \frac{\text{H}}{\text{мм}^2}.$$

Поперечное сечение стержня – круглое.

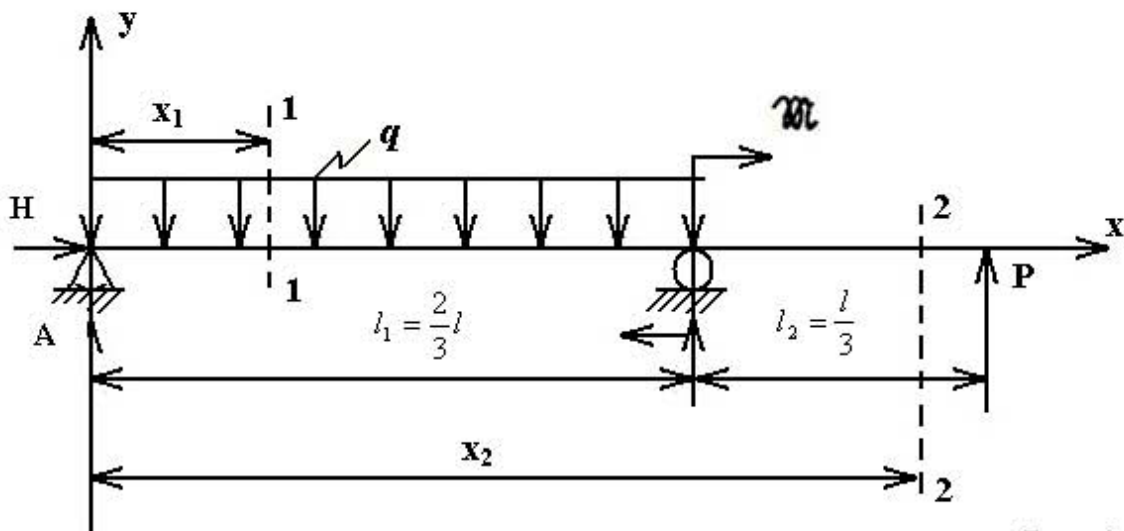


Рис. 1

Для расчёта схемы балки необходимо выполнить следующее:

1. Определение реакций опор из уравнений статического равновесия.

$$\sum P_x = H = 0$$

$$\sum P_y = A + B + P - q \cdot l_1 = 0$$

$$A + B + 100 - 0,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1200 = 0 \quad A + B = 100\text{H}$$

$$\sum M_A = B \cdot \frac{2}{3}l + P \cdot l - q \cdot \frac{l_1^2}{2} - \mathcal{M} = 0$$

$$B \cdot 800 + 100 \cdot 1200 - 0,25 \cdot \frac{800^2}{2} - 80000 = 0 \quad B = 50\text{H}$$

$$A = 100 - B = 100 - 50 = 50\text{H}$$

2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила  $Q$  в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Поперечная сила в сечении балки считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз, отрицательной – в противоположном случае.

На участке  $0 \leq x_1 \leq l_1$   $Q_1 = A - q \cdot x_1$

Если  $x_1 = 0$   $Q_1 = A = 50H$

Если  $x_1 = l_1$   $Q_1 = A - q \cdot l_1 = 50 - 0,25 \cdot 800 = 50 - 200 = -150H$

На участке  $l_1 \leq x_2 \leq (l_1 + l_2)$   $Q_2 = A - q \cdot l_1 + B = 50 - 0,25 \cdot 800 + 50 = -100H$

Эшора поперечных сил имеет следующий вид:

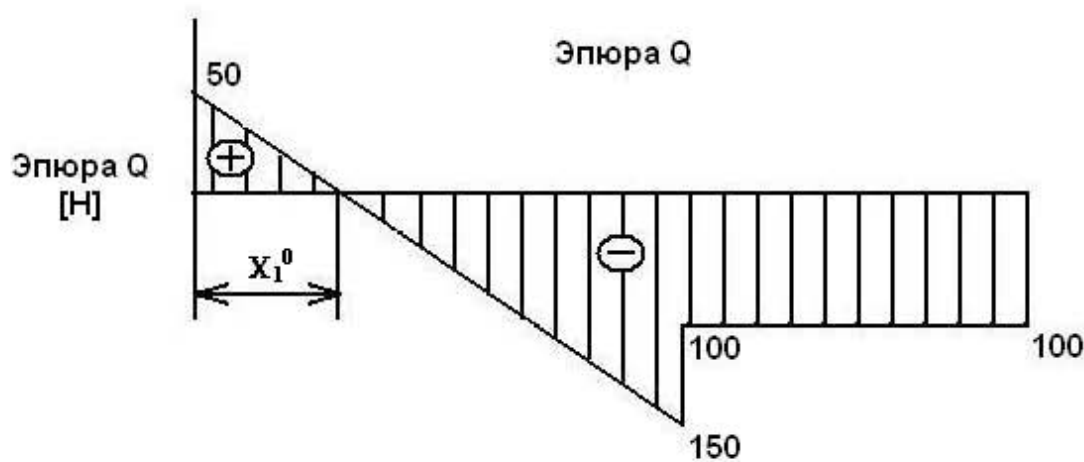


Рис. 2

Положительные величины откладываются вверх, отрицательные вниз. Видно, что на первом участке поперечная сила меняет свой знак.  $Q_1 = A - q \cdot x_1^0$ . Это происходит при  $x_1 = x_1^0$ ;  $Q_1 = 0$

$$x_1^0 = \frac{A}{q} = \frac{50}{0,25} = 200 \text{ мм.}$$

Изгибающий момент в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов (вычисленных относительно центра тяжести сечения) внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

Изгибающий момент в сечении балки считается положительным, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном случае.

На участке  $0 \leq x_1 \leq l_1$   $M_1 = A \cdot x_1 - \frac{q \cdot x^2}{2}$

Если  $x_1 = 0$   $M_1 = 0$

Если  $x_1 = l_1$

$$\begin{aligned} M_1 &= A \cdot l_1 - \frac{q \cdot l_1^2}{2} = 50 \cdot 800 - \frac{0,25 \cdot 800^2}{2} = 40000 - 80000 = \\ &= -40000H \cdot \text{мм} = 40KH \cdot \text{мм} \end{aligned}$$

Поскольку изгибающий момент нелинейная функция, то надо вычислить его в промежуточных точках.

При  $x_1 = x_1^0$

$$M_1 = A \cdot x_1^0 - \frac{q \cdot (x_1^0)^2}{2} = 50 \cdot 200 - \frac{0,25 \cdot 200^2}{2} = 10000 - 5000 = 5000 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 5 \text{ КН} \cdot \text{мм}.$$

Ещё одна промежуточная точка при  $x_1 = \frac{l_1}{2} = 400 \text{ мм}$

$$M_1 = A \cdot 400 - \frac{q \cdot (400)^2}{2} = 50 \cdot 400 - \frac{0,25 \cdot 400^2}{2} = 20000 - 20000 = 0.$$

На участке  $x_1 = l_1$   $M_2 = A \cdot x_2 - q \cdot l_1 \cdot (x_2 - \frac{l_2}{2}) + B \cdot (x_2 - l_1) + M$

Если  $x_2 = l_1$

$$M_2 = A \cdot l_1 - q \cdot l_1 \cdot (l_1 - \frac{l_2}{2}) + M = 50 \cdot 800 - 0,25 \cdot 800 \cdot 400 + 80000 = 40000 - 80000 + 80000 = 40000 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 40 \text{ КН} \cdot \text{мм}$$

Если  $x_2 = l_1 + l_2 = 1200 \text{ мм}$

$$M_2 = A \cdot 1200 - q \cdot 800 \cdot (1200 - 400) + B \cdot (1200 - 800) + 80000 = 50 \cdot 1000 - 0,25 \cdot 800 \cdot (1200 - 400) + 50 \cdot (1200 - 800) + 80000 = 60000 - 160000 + 20000 + 80000 = 0$$

Эпюра изгибающих моментов имеет следующий вид:

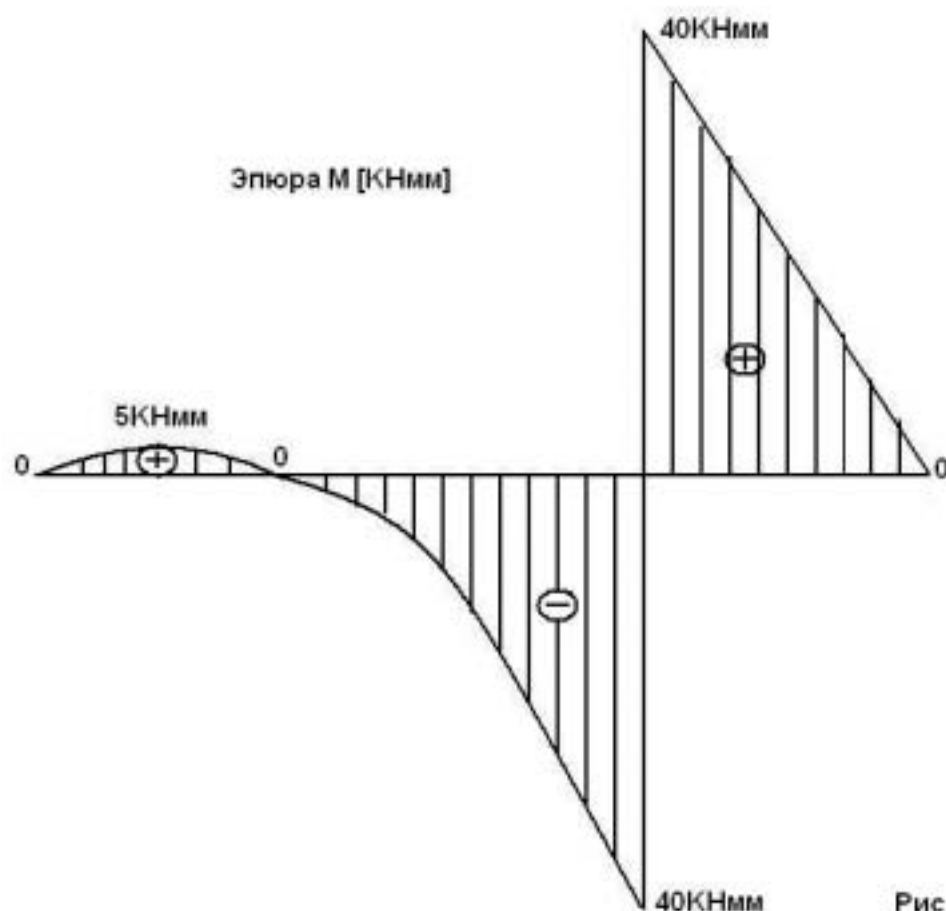


Рис. 3

3. Наиболее опасное поперечное сечение будет там, где изгибающий момент достигает максимума по абсолютной величине.  
В данной задаче как видно из эпюры рис. 3, при  $x = 800\text{мм}$ .  $M_{\max} = 40\text{кНм}$ .
4. Подобрать размеры круглого поперечного сечения по условию прочности при изгибе (допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ ).

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma],$$

$M$  – максимальный изгибающий момент.  $M_{\max} = 40\text{кНм}$

$W$  – момент сопротивления круглого сечения.  $W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$

$$\sigma_{\max} = \frac{32M_{\max}}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma], \quad d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 40000}{\pi \cdot 160}} = 13,66\text{мм}.$$

Полученное значение округляется в большую сторону.

Примем  $d = 14\text{мм}$ .

5. Проверить подобранное сечение на действие максимальных касательных напряжений.

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

здесь  $Q$  – максимальная поперечная сила (из эпюры  $Q$ )

В данном случае  $Q_{\max} = 160\text{Н}$ .

$A$  – площадь поперечного сечения.

В данном случае  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 153,86\text{мм}^2$

$$\sigma_{\max} = \frac{4 \cdot 160}{3 \cdot 153,86} = 1,38 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} < \frac{160}{2} \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$$

Условие прочности выполнено.

Подобран диаметр балки по заданной схеме нагрузок  $d = 14\text{мм}$ .



Для всех вариантов  $l = 0,5\text{м}$ ,  $q = 1,0 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$

Данные к расчётным схемам балок					
Вариант	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$P$	$M$
2	$l$	$2l$	$l$	$2ql$	$2ql^2$