

Задача 3.2

Задача посвящена временному и частотному (спектральному) методам расчета реакции цепей на сигналы произвольной формы. В качестве такого сигнала используется импульс прямоугольной формы (видеоимпульс).

Электрические схемы цепей (рис. 3.6) содержат емкости C или индуктивности L , а также сопротивления R . Для всех вариантов $R_2 = 3R_1$. В схемах, где имеется сопротивление R_3 , его величина $R_3 = 0,2R_1$. Во всех схемах входным напряжением $u_1(t)$ является прямоугольный импульс длительностью t_u и амплитудой U_1 .

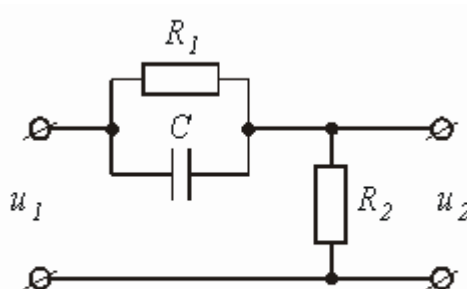
1. Перерисуйте схему Вашего варианта (см. табл. 1 и рис. 3.6). Выпишите исходные данные Вашего варианта (таблица 4).

Таблица 4

Варианты	C , пф или L , мкГн	R_1 , кОм	t_u , нс	U_1 , В
От 10 до 19	25	1	35	4

Временной метод расчета

2. Рассчитайте переходную $g_2(t)$ и импульсную $h_2(t)$ характеристики цепи по напряжению классическим или операторным методами (по выбору).



7

Рис.3.6

3. Рассчитайте реакцию цепи в виде выходного напряжений $u_2(t)$ используя:

- интеграл Дюамеля;
- интеграл наложения.

4. Постройте временные диаграммы входного и выходного напряжений.

Частотный метод расчета

5. Рассчитайте комплексные спектральные плотности входного $U_1(j\omega)$ и выходного $U_2(j\omega)$ сигналов.
6. Рассчитайте и постройте графики модулей $|U_1(j\omega)| = U_1(\omega)$, $|U_2(j\omega)| = U_2(\omega)$ и модуля комплексной передаточной функции цепи $|H(j\omega)| = H(\omega)$, как функций от циклической частоты f в диапазоне частот $0 - 3/t_u$.

Типовая задача Т3.2 (Пример решения)

Схема цепи, приведенная на рис. 3.7 а, содержит емкость $C = 10$ пф и сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 3R_1 = 3$ кОм. На входе цепи действует прямоугольный импульс (рис. 3.8) длительностью $t_u = 60$ нс и амплитудой $U_1 = 4$ В. Выполнить расчеты в соответствии с заданием к задаче 3.2.

Решение

1. Расчет переходной и импульсной характеристик классическим методом.

1.1. Переходная характеристика цепи рассчитывается, как переходной процесс в виде тока или напряжения, вызванный включением цепи с нулевыми начальными условиями на постоянное напряжение 1 В. В соответствии с этим составляется схема включения (рис. 3.7 б), на которой $E = 1$ В. В задаче определяется переходная характеристика $g_2(t)$ по напряжению относительно выходного контура $R_2 C$, поэтому можно записать, что:

$$g_2(t) = u_{R_2}(t) + u_C(t) = R_2 i(t) + u_C(t) = R_2 C \frac{du_C}{dt} + u_C(t), \quad (3.11)$$

Напряжение $R_2 = 3R_1$ в схеме на рис. 3.7 б может быть рассчитано с помощью общей формулы (3.3) расчета переходных процессов в схемах первого порядка:

$$u_C(t) = u_{C,np} + Ae^{pt},$$

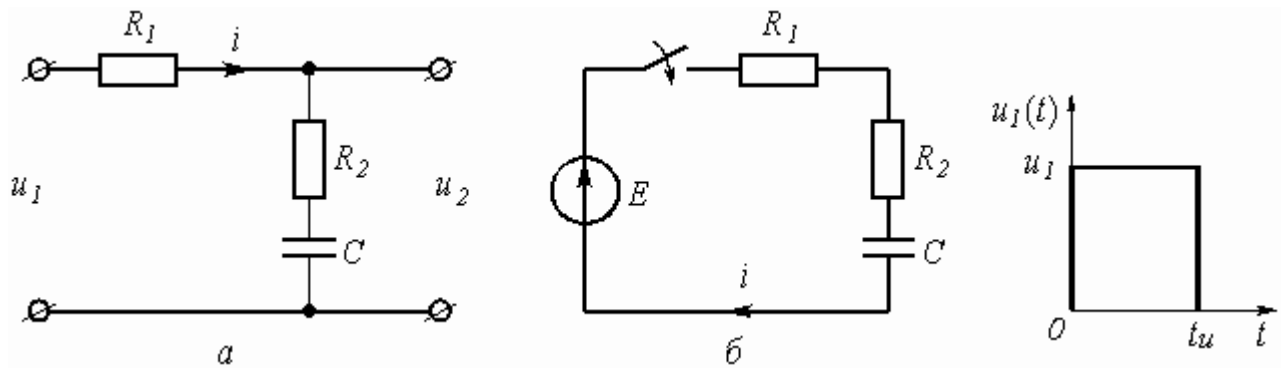


Рис.3.7

где $u_{C.нр} = u_C(\infty) = 1$ В; p – корень характеристического уравнения, находится из операторного сопротивления схемы $Z(p) = R_1 + R_2 + 1/pC$, и равен $p = 1/(R_1 + R_2)C$; постоянная интегрирования находится из рассмотрения $u_C(t)$ при $t = 0_+$:

$$u_C(0_+) = u_{C.нр} + A = 0 \quad (\text{нулевое начальное условие}).$$

Откуда $A = -u_{C.нр} = -1$. Окончательно

$$u_C(t) = 1 - 1e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}} = 1 - e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}}$$

где $\tau_1 = 40 \cdot 10^{-9} C$ – постоянная времени цепи.

Подставляя $R_2 = 3R_1$ в (3.11), получим:

$$\begin{aligned} g_2(t) &= R_2 C \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = \\ &= 1 - 0,25 e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Обратить внимание, что $g_2(t)$ в (3.12) определяется только элементами цепи и не зависит ни от токов, ни от напряжений.

1.2 Импульсная характеристика цепи $h(t)$ есть производная от переходной характеристики $h(t) = g\phi(t)$. Однако следует учесть, что, если переходная характеристика отлична от нуля при $t = 0$, т.е. имеет скачок при $t = 0$, то при дифференцировании появляется дополнительное слагаемое:

$$h(t) = g(0)d(t) + g\phi(t).$$

В рассматриваемой задаче $g_2(0) = 0,75$, поэтому

$$h_2(t) = 0,75 \delta(t) + 6,25 \cdot 10^6 e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}}, \quad (3.13)$$

где $d(t)$ – импульсная функция (функция Дирака).

2. Расчет выходного напряжения $u_2(t)$ временным методом.

2.1. Использование интеграла Дюамеля.

Из известных четырех формул интеграла Дюамеля наиболее общий характер имеет формула вида

$$u_2(t) = u_1(0)g_2(t) + \int_0^t u_1'(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \quad (3.14)$$

в обозначениях величин и понятий, принятых в рассматриваемой задаче. Переменной интегрирования в (3.14) является t (не путать с постоянной времени τ_I).

Входное напряжение $u_1(t)$ имеет форму прямоугольного импульса (рис. 3.8), аналитическая запись которого может быть представлена как

$$u_1(t) = \begin{cases} U_I & \text{при } 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & \text{при } t \geq t_u. \end{cases} \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что $u_1(0) = U_I$ и что производная $u_1'(t) = 0$ или для переменной $\tau - u_1'(\tau) = 0$.

Число участников интегрирования в (3.14) определяется числом участков в функции, описывающей входной сигнал, в которых она непрерывна и дифференцируема [1, с. 188]. Для функции (3.15) таких участков в виде интервалов времени два: $0 \leq t < t_u$ и $t_u \leq t < \infty$. Необходимость учета второго участка, когда $u_1'(t) = 0$, объясняется тем, что за время действия импульса в реактивных элементах цепи накапливается энергия электрического и магнитного полей, которая после окончания импульса постепенно убывает до нуля, создавая напряжение и токи в цепи. Анализ этих величин и проводится в интервале $t \geq t_u$.

Важнейшей характерной особенностью аппарата интеграла Дюамеля является то, что при записи реакции цепи на каждом новом интервале времени наличие

скачкообразного изменения входного сигнала в начальный момент рассматриваемого интервала учитывается дополнительным слагаемым вида

$$\Delta U g(t - t_{\kappa}),$$

где $D U$ – амплитуда скачка;

t_{κ} – момент действия скачка.

Учитывая сказанное, запишем выходное напряжение цепи в соответствие с (3.14) и (3.12):

для интервала времени $0 \leq t < t_u$

$$u_2(t) = U_1 g_2(t) + \int_0^t 0 \cdot g_2(t - \tau) d\tau = 4 \cdot \left(1 - 0,25 e^{-25 \cdot 10^6 t} \right) = 4 - e^{-25 \cdot 10^6 t} \quad (3.16)$$

для интервала времени $t_u \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= U_1 g_2(t) + \int_0^{t_u} 0 \cdot g_2(t - \tau) d\tau - U_1 g_2(t - t_u) = \\ &= 4 \cdot \left(1 - 0,25 e^{-25 \cdot 10^6 t} \right) - 4 \cdot \left(1 - 0,25 e^{-25 \cdot 10^6 (t - t_u)} \right) = 3,48 e^{-25 \cdot 10^6 t}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

2.2. Использование интеграла наложения.

В отличие от интеграла Дюамеля в интеграле наложения не учитываются дополнительными слагаемыми скачки входного напряжения:

$$u_2(t) = \int_0^t U_1(\tau) \cdot h_2(t - \tau) d\tau, \quad (3.18)$$

С учетом (3.13) реакция (3.18) заданной цепи на прямоугольный импульс будет равна:

для интервала времени $0 \leq t < t_u$

$$u_2(t) = \int_0^t U_1 \left[0,75 \delta(\tau) + 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t - \tau)} \right] d\tau,$$

Используя фильтрующее свойство импульсной d -функции [1. стр. 173], получим

$$u_2(t) = 4 \cdot 0,75 + 4 \int_0^t 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} d\tau = 4 - e^{-25 \cdot 10^6 t}$$

Для интервала времени $t_u \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^{t_u} U_I \left[0,75 \delta(\tau) + 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau + \\ &+ \int_{t_u}^t \left[(0 - U_I) 0,75 \delta(\tau - t_u) + 0 \cdot 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= 4 \cdot 0,75 + \left(e^{25 \cdot 10^6 t_u} - 1 \right) e^{-25 \cdot 10^6 t} - 4 \cdot 0,75 = 3,48 e^{-25 \cdot 10^6 t}. \end{aligned}$$

Сравнение результатов расчетов напряжения $u_2(t)$ с использованием интегралов наложения и Дюамеля показывает, что они совпадают между собой.

3. Построение временной диаграммы входного и выходного напряжений.

Диаграмма выходного напряжения строится с использованием формул (3.16) и (3.17) путем подстановки в них соответствующих моментов времени. Результаты расчетов сводятся в таблицу 5.

Таблица 5

Время,	0	$0,3t_u$	$0,6t_u$	t_{u-}	t_{u+}	$t_u + \tau_I$	$t_u + 2\tau_I$	$t_u + 3\tau_I$
нс	0	18	36	60	60	100	140	180
$u_1, В$	4	4	4	4	0	0	0	0
$u_2, В$	3	3,4	3,6	3,8	0,8	0,28	0,03	0,01

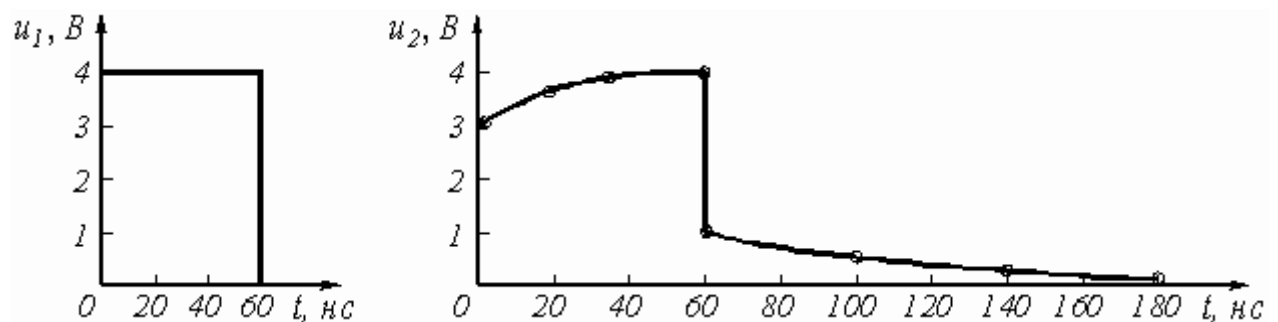


Рис.3.8

Из таблицы 5 видно, что $u_2(t)$ в момент $t = t_u$ рассчитывается дважды: при t_{u-} по формуле (3.16), а при t_{u+} по формуле (3.17). Именно при такой методике можно определить будет ли скачкообразное изменение в форме выходного сигнала в момент изменения функции, описывающей входной сигнал, как это и показано в рассматриваемом примере.

Выбор расчетных точек в интервале $t > t_u$ определяется временем затухающего переходного процесса, которое зависит от постоянной времени цепи, равной

$$\tau_I = (R_1 + R_2)C = (1 + 3)10^3 \cdot 10^{-11} = 40 \text{ нс.}$$

Временные диаграммы входного и выходного напряжений показаны на рис. 3.9.

4. Расчет комплексной спектральной плотности входного $U_1(j\omega)$ и выходного $U_2(j\omega)$ сигналов.

Для расчета комплексной спектральной плотности непериодического сигнала $f(t)$ произвольной формы используется прямое преобразование Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Для заданного входного сигнала (3.15) преобразование Фурье дает выражение

$$U_1(j\omega) = \int_0^{t_u} U_1 e^{-j\omega t} dt = \frac{U_1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_u})$$

которое после преобразований (в контрольной работе показать эти преобразования) принимает более удобную форму

$$U_1(j\omega) = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_u}{2} e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} = U_1 t_u \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} e^{-j\frac{\omega t_u}{2}} \quad (3.19)$$

Комплексная спектральная плотность выходного сигнала находится по формуле

$$U_2(j\omega) = H(j\omega) \cdot U_1(j\omega), \quad (3.20)$$

где $H(j\omega)$ – комплексная передаточная функция цепи по напряжению. Функция $H(j\omega)$ находится как отношение комплексного значения гармонического

напряжения \underline{U}_2 на выходе цепи к комплексному значению гармонического напряжения \underline{U}_1 той же частоты, приложенному ко входу цепи:

$$H(j\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1.$$

Для схемы, приведенной на рис. 3.7 а легко получить:

$$\underline{U}_2 = \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) \underline{I} = \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) \frac{\underline{U}_1}{R_1 + R_2 - j \frac{1}{\omega C}}.$$

Тогда

$$H(j\omega) = \frac{R_2 - j \frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2 - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega (R_1 + R_2) C} \quad (3.21)$$

Анализ (3.21) позволяет сделать вывод, что комплексная передаточная функция цепи по напряжению определяется только элементами цепи и является безразмерной величиной.

Используя (3.19) и (3.21), находим по (3.20) спектральную плотность выходного сигнала:

$$U_2(j\omega) = \frac{2U_1(1 + j\omega R_2 C)}{\omega[1 + j\omega(R_1 + R_2)C]} \sin \frac{\omega t_u}{2} e^{-j \frac{\omega t_u}{2}} \quad (3.22)$$

5. Расчет графиков модулей $|U_1(j\omega)|$, $|H(j\omega)|$ и $|U_2(j\omega)|$.

Из выражений (3.19), (3.21) и (3.22) легко получить модули: спектральной плотности входного напряжения

$$U_1(\omega) = |U_1(j\omega)| = \frac{2U_1}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_u}{2} \right|; \quad (3.23)$$

комплексной передаточной функции (амплитудно-частотная характеристика цепи)

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}}; \quad (3.24)$$

спектральной плотности выходного напряжения

$$U_2(\omega) = |U_2(j\omega)| = \frac{2U_1 \sin \frac{\omega t_u}{2}}{\omega} \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}} \quad (3.25)$$

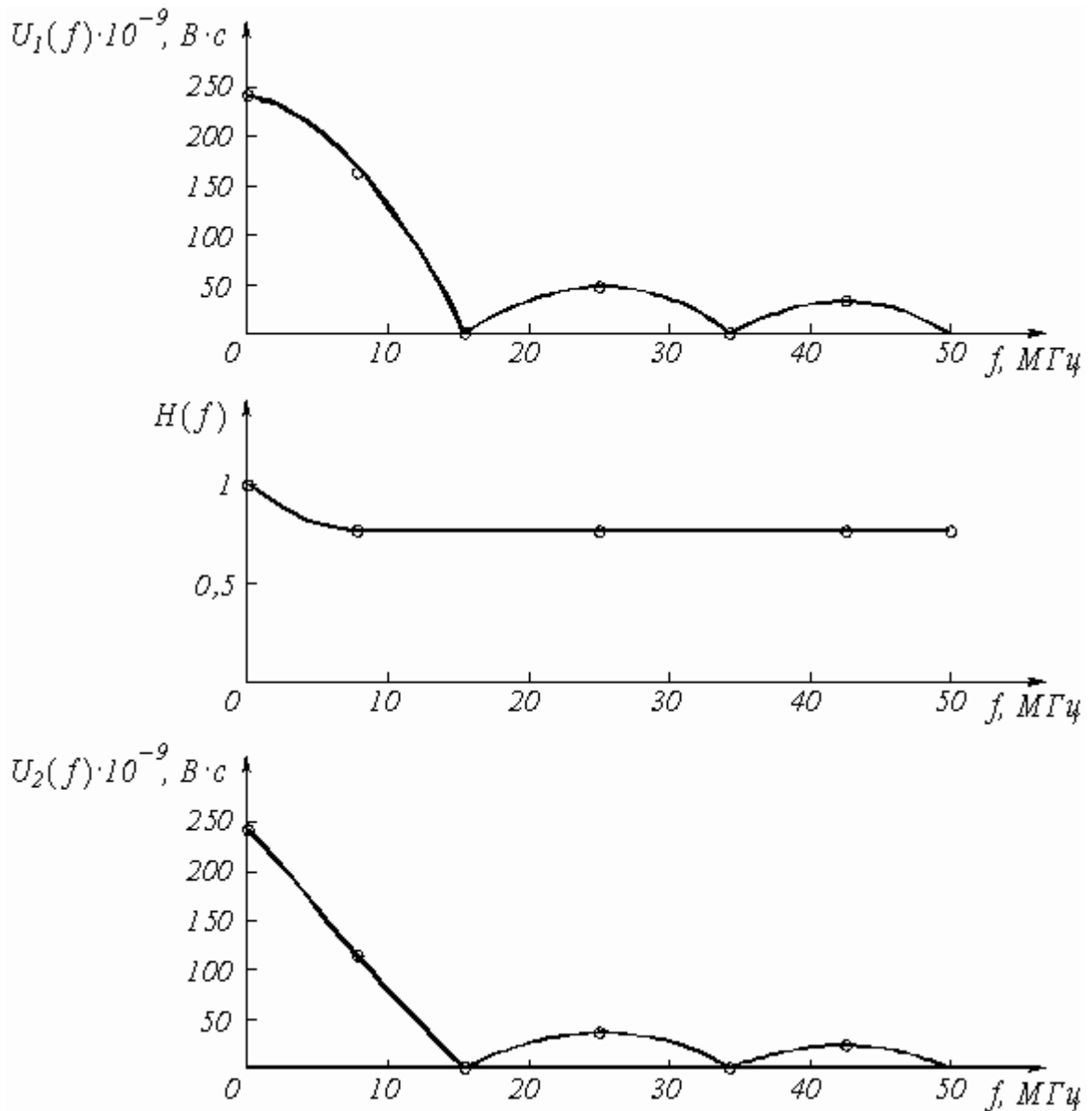


Рис.3.10

Для построения графиков полученных функций необходимо выбрать расчетные точки по частоте. Учтем, что спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса измеряется в вольт × секундах [В × с] и что она обращается в ноль на частотах $f = 1/t_u, 2/t_u, 3/t_u$ и т.д. Поэтому дополнительно выбираются промежуточные точки между этими частотами. Максимальная частота в соответствие с заданием равна $3/60 \times 10^{-9} = 50 \times 10^6$ Гц = 50 МГц. Результаты расчетов по (3.23), (3.25) сводим в таблицу 6.

Таблица 6

f, МГц	$\omega \cdot 10^6$, рад/с	$U_1(\omega) \cdot 10^{-9}$, В × с	$H(\omega)$	$U_2(\omega) \cdot 10^{-9}$, В × с
0	0	240	1	240
8,3	52,1	153	0,75	115
16,6	104,2	0	0,75	0
24,9	157	51	0,75	38
33,3	209	0	0,75	0
41,6	261	31	0,75	23
50	314	0	0,75	0

По данным таблицы 6 строим графики (рис. 3.10).

[назад](#)