

Вариант 1

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t + 2x}{t}.$$

2. Найти такую кривую, проходящую через точку $(0, -2)$, чтобы угловым коэффициентом касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в три раза.

3. Проинтегрировать уравнение $(t^2 x^2 - 1)x' + 2tx^3 = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + x \cos t = \sin t \cos t, \quad x(0) = 1$.

5. Доказать, что линейное уравнение $x' = kx + f(t)$, где k — постоянная, отличная от 0, а $f(t)$ — ω -периодическая функция, имеет ровно одно ω -периодическое решение, и найти это решение.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(1 - x^2 y) dx + x^2 (y - x) dy = 0.$$

8. Уравнение $y''' = 0$ имеет своими решениями две функции: $y_1(t) = 0$ и $y_2(t) = t$. Как согласуется с теоремой существования и единственности тот факт, что обе эти кривые проходят через точку $(0, 0)$ плоскости Oty ?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt[3]{x^2}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = (x' - 1)e^{x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка. Определить области существования и единственности решения задачи Коши:

а) $t(x'^2 + e^{2x}) = -2x'$; б) $x = (tx' + 2x)^2$; в) $x^2(x - tx') = t^3 x'$;

г) $x' = \frac{x^2 - t}{2x(t + 1)}$; д) $(t + x)^2 x' = 1$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'^3 = (x+1)^2 x''$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^v + y^{iv} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$; б) $y'' + 2y' - 3y = -4e^t + 3t + 2$;

в) $y''' + 9y' = 2 \sin 3t + e^{3t}$; г) $t^2 y'' + ty' + y = 2 \sin(\ln t)$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3t}}{3 + e^{-3t}}$, $y(0) = 4 \ln 4$, $y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1)$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x + 4y. \end{cases}$

Вариант 2

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{x-t}{t+x}.$$

2. Найти кривую y , для которой площадь $S(t)$, ограниченная кривой, осью абсцисс и прямыми $x = 0$, $x = t$, удовлетворяет равенству $S(t) = a^2 \ln(y(t)/a)$.

3. Проинтегрировать уравнение $\left(1 + \sqrt{\frac{x^2}{t} - 1}\right) dt - 2x dx = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $dt = (\exp(-x^2/2) - tx) dx$, $x(1) = 0$.

5. Найти общее решение уравнения $x' + p(t)x = 0$, где $p(t)$ непрерывна на (a, b) , если известно ненулевое частное решение $x_1(t)$ этого уравнения.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x^2 + y) dx - x dy = 0.$$

8. Сформулировать теорему существования и единственности для си-

системы уравнений $\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{y} = f(x, y), \\ \ddot{y} + 5\dot{x} = g(x, y). \end{cases}$

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = (x-1)\sqrt{x^3}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $(x')^2 t = e^{1/x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка. Определить области существования и единственности решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } (tx' - x)^2 &= x'^2 - \frac{2xx'}{t} + 1; & \text{б) } x'^3 + (3t-6)x' &= 3x; \\ \text{в) } tx'(\ln x - \ln t) &= x; & \text{г) } t(t-1)x' + x^3 &= tx; \\ \text{д) } (t \cos x + \sin 2x)x' &= 1. \end{aligned}$$

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - e^x x' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } y^{iv} + 8y'' + 16y &= 0; & \text{б) } y'' - 3y' + 2y &= 3e^{2t} + 2t^2; \\ \text{в) } y'' + 4y &= 8 \cos 2t + 2e^{2t}; & \text{г) } t^2 y'' - ty' &= -t + 3/t. \end{aligned}$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2t}}$, $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 6 \ln 2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

Вариант 3

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{x^2 - 2tx}{t^2}.$$

2. Доказать, что единственная кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через одну точку, есть окружность.

3. Проинтегрировать уравнение $2tx'(t - x^2) + x^3 = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить

график: $(t - 2tx - x^2)x' + x^2 = 0, \quad x(0) = 1.$

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка, если известны два частных решения этого уравнения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x + y^2) dx - 2xy dy = 0.$$

8. Для уравнения $x''' = 2t - \sqrt{1 - t^2 - (x')^2}$ поставить начальные условия так, чтобы они выделяли единственное действительное решение.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \arccos x$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t(1 + (x')^2)^{3/2} = a$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка. Определить области существования и единственности решения задачи Коши:

а) $(tx' - x)^2 = t^2x^2 - t^4$; б) $2x'^3 - 3x'^2 + t = x$; в) $xx' = 4t + 3x - 2$;
г) $tx' + 1 = e^{t-x}$; д) $x' = (4t + x - 3)^2$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(1 + xx')x'' = (1 + x'^2)x', \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

а) $y^{iv} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' = e^{3t} - 18t + 5$;
в) $y''' + y' = 5 \sin t + 3e^t$; г) $t^2y'' - ty' + y = 6t \ln t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + \pi^2y = \frac{\pi^2}{\sin \pi t}, \quad y(1/2) = 1, \quad y'(1/2) = \frac{\pi^2}{2}.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Вариант 4

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = 3t^2 + x^2.$$
2. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ot , равен x^2/t .
3. Проинтегрировать уравнение $2t + 3x - 5 + (3t + 2x - 5)x' = 0$.
4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $t^2 + tx' = x, \quad x(1) = 0$.
5. Выписать линейное однородное уравнение первого порядка, если известно одно ненулевое частное решение $x_1(t)$ этого уравнения.
6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.
$$(1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$$
7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.
$$(2x^2y + 2y + 5) dx + (2x^3 + 2x) dy = 0.$$
8. Верно ли, что всякая скалярная функция двух переменных $f(t, x)$, имеющая ограниченную частную производную по x , удовлетворяет условию Липшица по x ?
9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$
10. Проинтегрировать уравнение $x^{2/5} + (x')^{2/5} = a^{2/5}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.
11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
а) $(x - 2tx')^2 = 4xx'^3$; б) $3x'^3 - tx' + 1 = 0$; в) $xx' + tx = t^3$;
г) $x^2 = (txx' + 1) \ln t$; д) $(2t^2x - 3x^2)x' = 6t^2 - 2tx^2 + 1$.
12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x + 1)^2 x'' = (x')^3, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.
13. Решить уравнения:

а) $y'' + 8y''' + 16y' = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2t} + 5t^2 - 8$;

в) $y''' + 5y' = -3 \sin \sqrt{5}t + 4e^{\sqrt{5}t}$;

г) $(2t+1)^2 y'' - 4(2t+1)y' + 8y = -8t - 4$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-t}}{2 + e^t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

Вариант 5

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = 3t^2 - x^2.$$

2. Доказать, что кривая, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

3. Проинтегрировать уравнение $8t + 4x + 1 + (4t + 2x + 1)x' = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' - 2tx = 2t \exp(t^2)$, $x(0) = 1$.

5. Показать, что одним из решений уравнения

$$x' + kx = kq(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

где k — постоянное число, является функция $x = k \int_0^{+\infty} q(t-s)e^{-ks} ds$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения. $(\sin(xy) + xy \cos(xy)) dx + x^2 \cos(xy) dy = 0$.

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x^4 \ln x - 2xy^3) dx + 3x^2 y^2 dy = 0.$$

8. Верно ли, что всякая скалярная функция двух переменных $f(t, x)$, удовлетворяющая условию Липшица по x , имеет частную производную по x ?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $t = x' + \sin x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

- а) $t^2(x - tx') = xx'^2$; б) $tx' + x = \ln x'$; в) $(2t + x + 5)x' = 3t + 6$;
г) $(x' - t\sqrt{x})(t^2 - 1) = tx$; д) $(t^2x^2 + 1)x + (tx - 1)^2tx' = 0$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - 12x^2 = 0$, $x(0) = 1/2$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

- а) $y^{iv} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0$; б) $y''' - y' = e^t \sin t + 2t^2$;
в) $y'' + 16y = 2 \cos 4t + 5e^{4t}$; г) $(t + 1)^2y'' - 2(t + 1)y' + 2y = 6t + 6$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2t$, $y(\pi/4) = 5$, $y'(\pi/4) = 4$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

Вариант 6

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = (2x - 5)(t + 1).$$

2. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в каждой точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \exp\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{x}{t}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + 2tx = \exp(-t^2)$, $x(1) = 0$.

5. Найти общее решение линейного однородного уравнения

$$x' + p(t)x = 0,$$

приведя его к уравнению с постоянным коэффициентом при x при помощи замены независимой переменной $t = \psi(\tau)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$x(2x^2 + y^2) dx + y(x^2 + 2y^2) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.
 $(x + \sin x + \sin y) dx + \cos y dy = 0.$
8. Привести пример уравнения $x' = f(t, x)$ с непрерывной правой частью, у которой в точке $(0, 0)$ нарушалась бы единственность решения.
9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = 3\sqrt[3]{(t+x)^2} - 1$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
10. Проинтегрировать уравнение $x = x'(1 + x' \cos x')$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.
11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
 а) $x'^4 = 4x(tx' - 2x)^2$; б) $3x'^4 = x' + x$; в) $x' = 3t + \sqrt{x - t^2}$;
 г) $x^2 x' + t^2 \sin^3 t = x^3 \operatorname{ctg} t$; д) $x' = \sqrt[3]{2t - x} + 2.$
12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график:
 $2xx'' = 3 + (x')^2, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = 1.$
13. Решить уравнения:
 а) $y^{iv} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = e^t t \sin t$;
 в) $y''' + 49y' = 5 \sin 7t + 6e^{7t}$; г) $t^3 y''' - 3t^2 y'' + 6ty' - 6y = -2t.$
14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую:
 $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$
15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Вариант 7

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
 $x' = t^2 - x^2 + x.$
2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.
3. Проинтегрировать уравнение $\left(\frac{2}{t^2} - x^2\right) dt + dx = 0.$
4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения,

найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' \cos t - x \sin t = 2t$, $x(0) = 0$.

5. В линейном однородном дифференциальном уравнении

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

произвести замену переменной $x = e^t$ и найти общее решение.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(2xy - y^3) dx + (2x^2 \ln x + 3xy^2) dy = 0.$$

8. Какие из следующих функций: $t^2 + x^2$, $|t - x|$, $\sqrt{t^2 + x^2}$ удовлетворяют глобальному условию Липшица по переменной x в области $0 < t < 1$, $0 < x < 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = 1 + \frac{3}{2}(x - t)^{3/2}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = \arcsin x' + \ln(1 + (x')^2)$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $t^2 x'^2 - 2(tx - 2)x' + x^2 = 0$; б) $2x' = t + \ln x'$; в) $2tx' + 1 = x + \frac{t^2}{x - 1}$;
 г) $(2te^x + x^4)x' = xe^x$; д) $x' = \operatorname{tg}(x - 2t)$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $t^3 x'' = 4 \ln t$, $x(1) = 4$, $x'(1) = 0$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\text{iv}} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$; б) $y^{\text{iv}} - y = -8e^{-t} + t$;
 в) $y'' + 49y = 25 \cos 7t + 7e^{7t}$; г) $t^2 y'' + ty' + y = t(6 - \ln t)$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2t$, $y(\pi/4) = 3$, $y'(\pi/4) = 2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

Вариант 8

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 + 2t + x^2.$$

2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

3. Проинтегрировать уравнение $(x + x\sqrt{t^2x^4 - 1}) dt + 2t dx = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $tx' - 2x = t^3 \cos t$, $x(\pi) = 0$.

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения

$$x' + p(t)x = q(t),$$

приведя его к уравнению, не содержащему члена с искомой функцией при помощи введения новой искомой функции z по формуле $x = \alpha(t)z$, где $\alpha(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(3y^2 - x) dx + (2y^3 - 6xy) dy = 0.$$

8. Какие из следующих функций $tx^3 + t^2$, $\sin(t - x)$, $\sqrt{x + 2t}$ удовлетворяют глобальному условию Липшица по переменной x в области $0 < t < 1$, $0 < x < 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = |x|$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t = (x')^2 - 2x' + 2$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $x^2 + t^2x'^5 = tx(x'^2 + x'^3)$; б) $2tx' - x = \sin x'$;

в) $t^2(dx - dt) = (t + x)x dt$; г) $tx' = t\sqrt{x - t^2} + 2x$;

д) $x' + \operatorname{tg} x = t \sec x$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'x^2 + xx'' - (x')^2 = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

13. Решить уравнения:

а) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = t(\cos t + 1)$;

в) $y''' + 8y' = \sin \sqrt{2}t \cos \sqrt{2}t$; г) $t^2y'' - 2y = \sin(\ln t)$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3t}$, $y(\pi/6) = 4$, $y'(\pi/6) = \frac{3\pi}{2}$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

Вариант 9

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = x^2 + x + 1.$$

2. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к длине радиуса-вектора точки касания равно постоянной величине.

3. Проинтегрировать уравнение $(x^4 - 3t^2)dx + tx dt = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos^3 t}$, $x(0) = 0$.

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0) .

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xy dy = 0.$$

8. Какие из следующих функций: $\frac{1}{t+x}$, $|t-x|$, $tx^2 \ln x$ удовлетворяют глобальному условию Липшица по переменной x в области $0 < t < 1$,

$0 < x < 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt{|x|}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = \ln x' + \sin x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

- а) $t^2 x'^2 - 2txx' = t^2 + 3x^2$; б) $x'^2 t = e^{1/x'}$;
в) $t dx - x dt = t\sqrt{t^2 + x^2} dt$; г) $(t + 2x^3)x' = x$;
д) $(xx')^3 = 27t(x^2 - 2t^2)$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $2xx'' + x^2 - (x')^2 = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

- а) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$; б) $y'' + 3y' - 4y = te^{-t} + 3$;
в) $y''' - 7y' = 5 \sin \sqrt{7}t + 9e^{\sqrt{7}t}$; г) $t^2 y'' - ty' - 3y = -\frac{16 \ln t}{t}$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2t}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 10 \ln 3$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Вариант 10

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t + x - x^2.$$

2. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в произвольной точке кривой, равна расстоянию этой точки от начала координат.

3. Проинтегрировать уравнение $x^3 dt + 2(t^2 - tx^2) dx = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x't \ln t - x = 3t^3 \ln^2 t$, $x(e) = e^3$.

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0) .

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x - xy) dx + (x^2 + y) dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли функция $f(t, x) = \sqrt{t^2 + x^2}$ условию Липшица:

а) по переменной x ;

б) по паре переменных (t, x) ?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt{x - t}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x' = e^{x'/x}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $(tx' - x)^3 = x'^3 - 1$; б) $t^2 x^2 x' = 2tx' - x$;

в) $\left(t - x \cos \frac{x}{t}\right) dt + t \cos \frac{x}{t} dx = 0$; г) $x + x' \ln^2 x = (t + 2 \ln x)x'$;

д) $x' = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x''x^3 = 3$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{vi} - y = 0$; б) $y'' - 5y' + 6y = t^2 e^{2t} - 3$;

в) $y''' + 7y' = 5 \sin \sqrt{7}t + 10e^{\sqrt{7}t}$; г) $t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^2 - 2t + 2$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 3y' = \frac{9e^{3t}}{1 + e^{3t}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

Вариант 11

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{x}{t^2 + 2}.$$

2. Найти кривую, для которой произведение абсциссы произвольной точки кривой на величину отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \frac{t-x}{t-2x}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(2t - x^2)x' = 2x, \quad x(-8) = 8$.

5. Общее решение линейного уравнения имеет вид $x = A(t)C + B(t)$. Доказать обратное: дифференциальное уравнение всякого семейства кривых этого вида есть линейное уравнение первого порядка.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(x + \frac{\sin 2x}{y}\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x^2 + y) dx - x dy = 0.$$

8. При каких n уравнение $x^{(n)} = f(t, x)$, где f и f'_x непрерывны, может иметь среди своих решений две функции: $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = t^2 - t + 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \frac{1}{2}\sqrt{2x-t} + 1$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = (x')^2 e^{x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $x'^2 - xx' + e^t = 0$; б) $t = \ln x' + \sin x'$;

в) $(2t + 3x - 1) dt + (4t + 6x - 5) dx = 0$; г) $x' = \frac{1}{t - x^2}$;

$$д) \quad xx' + t = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + x^2}{t} \right)^2.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(t+1)x'' + t(x')^2 = x'$, $x(1) = -2$, $x'(1) = 4$.

13. Решить уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y^{\text{vi}} + y = 0; & \text{б) } y'' - 2y' + y = t(6e^t - 2); \\ \text{в) } y'' + 81y = 8 \cos 9t - 11e^{9t}; & \text{г) } t^2 y'' + ty' - y = t^m, \quad |m| \neq 1. \end{array}$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-t}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 5 \ln 3$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Вариант 12

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 - 4x^2.$$

2. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \frac{x}{t+x}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + x \cos t = \cos t$, $x(0) = 1$.

5. Доказать, что если $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ — однородное уравнение, а выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ — полный дифференциал некоторой функции, то общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид $xP(x, y) + yQ(x, y) = C$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$(3x^2 - 2x - y) dx + (2y - x + 3y^2) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x \right) dx - dy = 0.$$

8. Сколько интегральных кривых уравнения $x'' = f(t, x, x')$, где f, f'_x ,

$f'_{x'}$ — непрерывны, проходят через точку $(0, 1)$ плоскости Otx , касаясь прямой $x = 2t + 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x > 0, \\ x^2 + x, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = \frac{tx'}{2} + \frac{(x')^2}{t^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } tx(tx' - x)^2 + 2x' = 0; \quad \text{б) } x = x'\sqrt{1 + x'^2}; \quad \text{в) } 2tx'(t - x^2) + x^3 = 0;$$

$$\text{г) } t - \frac{x}{x'} = \frac{2}{x}; \quad \text{д) } x' = \left(\frac{3t + x^3 - 1}{x} \right)^2.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x - 2)x'' = 2(x')^2$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} + y = 0; \quad \text{б) } y'' + 4y' + 4y = te^{2t} - 2t^2;$$

$$\text{в) } y'' + 12y = 12 \sin \sqrt{3}t \cos \sqrt{3}t; \quad \text{г) } t^2 y'' + 4ty' + 2y = 2 \ln^2 t + 12t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2t}$, $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = \pi$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

Вариант 13

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 - 4t - x^2.$$

2. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в произвольной точке кривой отсекает на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

3. Проинтегрировать уравнение $\frac{dt}{2t^2 - 2tx + 2x^2} = \frac{dx}{x^2 - 4tx}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения,

найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' = \frac{x}{2x \ln x + x - t}, \quad x(e) = e.$

5. Пусть $y_1(t), y_2(t)$ — два различных решения уравнения $y' + p(t)y = q(t)$. При каких α и β линейная комбинация $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ есть решение этого уравнения?

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} \right) dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$\left(\frac{x}{y} + 1 \right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1 \right) dy = 0.$$

8. Сколько интегральных кривых уравнения $x''' = f(t, x)$, где f и f'_x — непрерывны, проходят через точку $(0, 0)$ плоскости Otx , касаясь графика функции $x = \sin t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x > 0, \\ x^3 + x^2, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $t = \frac{x}{x'} + \frac{1}{(x')^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \text{а) } t^2 x'^2 + x^2 &= 2t(2 - xx'); & \text{б) } t &= x'^2 - 2x' + 2; & \text{в) } x' &= \frac{2tx^3}{1 - t^2 x^2}; \\ \text{г) } 2t^3 xx' + 3t^2 x^2 + 7 &= 0; & \text{д) } (t^2 + x^2 + 1)xx' + (t^2 + x^2 - 1)t &= 0. \end{aligned}$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $tx'' - 2x' = 2t^4, \quad x(1) = 1/5, \quad x'(1) = 4.$

13. Решить уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } x^{\text{iv}} - x &= 0; & \text{б) } y''' - 4y'' + 4y' &= t^2 + te^{2t}; \\ \text{в) } y'' - 12y &= 13 \sin \sqrt{3}t \cos \sqrt{3}t + e^{\sqrt{3}t}; \\ \text{г) } (t+1)^3 y'' + 3(t+1)^2 y' + (t+1)y &= 6 \ln(t+1). \end{aligned}$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную

кривую: $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

Вариант 14

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения $x' = t^2 + 5t + x^2 - 3x$.
2. Показать, что кривая, симметричная относительно начала координат к интегральной кривой уравнения $4t^2 x'^2 - x^2 = tx^3$, также будет интегральной кривой этого уравнения.
3. Проинтегрировать уравнение $(x + \sqrt{t^2 + x^2}) dt - t dx = 0$.
4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' - xe^t = 2te^t$, $x(0) = e$.
5. Доказать, что любое решение уравнения $\dot{x} = g(x)$ монотонно.
6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.
$$\left(\frac{1}{x} + \sin y + y \sin x\right) dx + \left(\frac{1}{y} + x \cos y - \cos x\right) dy = 0.$$
7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.
$$(2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0.$$
8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x > t\}$ функция $f(t, x) = \sqrt{x - t}$?
9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
 $x' = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x, & \text{если } x > 0, \\ x^2 + x, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$
10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + a\sqrt{1 + (x')^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.
11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
а) $(tx' + x)^2 = t^2 x'$; б) $x = x' \ln x'$; в) $2(t^2 - tx^2)x' + x^3 = 0$;
г) $xx' + x^2 \operatorname{ctg} t = \cos t$; д) $(t^2 - 1)x' + x^2 - 2tx + 1 = 0$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $1 + xx'' + (x')^2 = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{iv} + 10y'' + 9y = 0$; б) $y'' - 8y' + 20y = te^{4t} \sin 2t - 5$;
 в) $y'' - 49y = 3 \cos 7t - 14e^{7t}$; г) $(t-2)^2 y'' - 3(t-2)y' + 4y = t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-t}}$, $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 3 \ln 2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Вариант 15

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 + x^2 + 2t.$$

2. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$x' + tx'^2 - x = 0,$$

являющиеся прямыми.

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \frac{x}{t} \ln \frac{x}{t}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + te^t x = e^{(1-t)e^t}$, $x(1) = 1$.

5. Доказать, что функция $x = \cos t$ ($t \in \mathbb{R}$) не может быть решением уравнения $\dot{x} = t^2 g(x)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \frac{x + \sin y \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(xy^2 + y) dx - x dy = 0.$$

8. При каких n уравнение $x^{(n)} = f(t, x)$, где f и f'_x непрерывны, может иметь среди своих решений функции $x_1(t) = 1 + t^2/2$ и $x_2(t) = \cos t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности

уравнения $x' = (x+1)^2\sqrt{|x-1|}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = -t + (x')^2 + (x')^3$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $x'^2 + 2(t-1)x' - 2x = 0$; б) $x = (x' - 1)e^{x'}$; в) $(x^4 - 3t^2)x' + tx = 0$;
 г) $x' = \frac{t}{x}e^{2t} + x$; д) $txx' - t^2\sqrt{x^2 + 1} = (t+1)(x^2 + 1)$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $2x'' = e^{4x}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1/2$.

13. Решить уравнения:

а) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 2te^t + e^t \sin 2t$;
 в) $y'' + 49y = 3 \cos 7t - 15e^{7t}$; г) $y'' - \frac{2y}{t^2} = 3 \ln(-t)$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y = \frac{1}{\sin t}$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = \pi/2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

Вариант 16

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t-3}{x+1}.$$

2. Найти кривую, зная, что площадь, заключенная между осью ординат, этой кривой и ординатой любой точки на ней, равна кубу этой ординаты.

3. Проинтегрировать уравнение $t(t+2x)dt + (t^2 - x^2)dx = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' - x \sin t = \sin t \cos t$, $x(0) = 1$.

5. Доказать, что задача $\dot{x} = |1 - x^2|$, $x(0) = 0$ имеет определенное на всей оси решение, которое единственно на любом промежутке, содержащем нуль.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x > t\}$ функция $f(t, x) = \frac{1}{|t - x|}$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x \ln^2(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = x' + \sin x' + \cos x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } t + xx' = x^2(1 + x'^2); & \text{б) } t = x' + \sin x'; & \text{в) } 2t^2 x' = x^2(2tx' - x); \\ \text{г) } (4tx - 3)x' + x^2 = 1; & \text{д) } x' \operatorname{tg} x + 4t^3 \cos x = 2t. \end{array}$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - x' \operatorname{ctg} t = \sin t$, $x(\pi/2) = 1$, $x'(\pi/2) = \pi/2$.

13. Решить уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y''' - 2y'' - y' + 2y = 0; & \text{б) } y'' - 2y' + 2y = e^t \sin t + 3t; \\ \text{в) } y''' - 81y' = 7 \cos 9t - 16e^{9t}; & \text{г) } t^2 y'' - ty' + y = \frac{\ln t}{t} + \frac{t}{\ln t}. \end{array}$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2t}}{2 + e^{2t}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Вариант 17

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{t}.$$

2. Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a .

3. Проинтегрировать уравнение $tx' = 3x - 2t - 2\sqrt{tx - t^2}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(1 + t^2)x' - 2tx = (1 + t^2)^2$, $x(1) = 5$.

5. Могут ли функции $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) \equiv 1$ быть решениями одного и того же уравнения $x'' + a_1x' + a_2x = 0$?

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 + y^2 - a^2)dx = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x > t\}$ функция $f(t, x) = \sqrt[3]{|t - x|}$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = (2 - x)\sqrt{1 - x}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + 4(x')^2$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $tx'^2 = x - x'$; б) $x = x'(1 + x' \cos x')$; в) $xx' + tx = t^3$;

г) $tx' = 2\sqrt{x} \cos t - 2x$; д) $\frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{x} - 2t\right) dx$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $tx'' = \ln t + 1$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\text{iv}} - 5y'' + 4y = 0$; б) $y'' - y = 4 \operatorname{sh} t + 5t - 3$;

$$\text{в) } y''' + 81y' = 6 \sin 9t - 17e^{9t}; \quad \text{г) } t^2 y'' - 2y = \frac{3t^2}{t+1}.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^t}{1+e^{-t}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

Вариант 18

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x^2}{t}.$$

2. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \frac{t+3x}{2t}.$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' - \frac{2}{t}x = t^3, \quad x(1) = 1.$

5. Найти общее решение линейного однородного уравнения

$$x' + p(t)x = 0,$$

приведя его к уравнению с постоянным коэффициентом при x при помощи замены независимой переменной $t = \psi(\tau).$

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$(3x^2y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$x \left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dx - y \left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x > t\}$ функция $f(t, x) = |t - x|$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt{1 - x^2}.$ На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = 2tx' + (x')^2$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

- а) $x'^3 + (x'^2 - 2x')t = 3x' - x$; б) $x = \arcsin x' + \ln(1 + x'^2)$;
 в) $t^2(dx - dt) = (t + x)x dt$; г) $(1 - t^2)x' - 2tx^2 = tx$;
 д) $2(t - x^2) dx = x dt$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $tx'' - x' = t^2 \cos t$, $x(\pi/2) = 1$, $x'(\pi/2) = \pi/2$.

13. Решить уравнения:

- а) $y'' - 10y''' + 9y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = e^{2t} \cos t + 2$;
 в) $y''' - 64y' = 7 \sin 4t \cos 4t - 18e^{8t}$;
 г) $(3t + 7)^3 y''' + 3(3t + 7)y' - 6y = 0$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y/4 = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 1/2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Вариант 19

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x}{t}.$$

2. Найти кривую, у которой треугольник, образованный осью Ox , касательной и радиусом-вектором точки касания, равнобедренный.

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \frac{t + 2x}{-t}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + 2tx = 2te^{-t^2}$, $x(0) = 1$.

5. В линейном однородном дифференциальном уравнении

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

произвести замену переменной $x = \cos t$ и найти общее решение.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в

полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$(x^2 + y)dy + (x - xy)dx = 0.$$

8. При каких n уравнение $x^{(n)} = f(t, x)$ с непрерывными на плоскости Otx функциями f и f'_x может иметь решения $x_1(t) = t^3 - t$ и $x_2(t) = -t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = 1 + x^3$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t = e^{x'} - 2x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\text{а) } 4x = t^2 + x'^2; \quad \text{б) } x = 2tx' + \ln x'; \\ &\text{в) } \left(t - x \cos \frac{x}{t}\right) dt + t \cos \frac{x}{t} dx = 0; \quad \text{г) } x' + x = tx^3; \\ &\text{д) } dx + (tx - tx^3) dt = 0. \end{aligned}$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' + x' \operatorname{tg} t = \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

13. Решить уравнения:

$$\begin{aligned} &\text{а) } y''' - 13y' - 12y = 0; \quad \text{б) } y'' - 8y' + 17y = t(e^{4t} \sin t + 5); \\ &\text{в) } y''' - 7y' = 7 \cos \sqrt{7}t - 19e^{\sqrt{7}t}; \quad \text{г) } (3t - 2)^2 y'' - 3(3t - 2)y' + 4y = t. \end{aligned}$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-t}}{2 + e^t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

Вариант 20

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x^2}{x}.$$

2. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси Ox , к отрезку, отсекаемому нормалью на оси Ot , есть величина постоянная, равная k .

3. Проинтегрировать уравнение $x' = \frac{2t+x}{t}$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + \frac{3}{t}x = \frac{2}{t^3}$, $x(1) = 1$.

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения

$$x' + p(t)x = q(t),$$

приведя его к уравнению, не содержащему члена с искомой функцией при помощи введения новой искомой функции z по формуле $x = \alpha(t)z$, где $\alpha(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$\left(2y + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dx + \left(3y + x + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dy = 0.$$

8. Сформулировать теорему существования и единственности для системы уравнений $\begin{cases} \ddot{t} + \ddot{x} = f(t, x), \\ \ddot{x} - \dot{t} = g(t, x). \end{cases}$

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = x^2 + x - 2$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = \frac{3}{2}tx' + e^{x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

- а) $tx' = 2x + \sqrt{1+x'^2}$; б) $x = t(1+x') + x'^2$; в) $x'\sqrt{t} = \sqrt{x-t} + \sqrt{t}$;
 г) $x' + t\sqrt[3]{x} = 3x$; д) $t dt + (t^2 \operatorname{ctg} x - 3 \cos x) dx = 0$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' = 3\sqrt{x+1}$, $x(2) = 0$, $x'(2) = 2$.

13. Решить уравнения:

- а) $y'' - y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} t + 3$;
 в) $y''' + 7y' = 7 \cos \sqrt{7}t - 20e^{\sqrt{7}t}$; г) $t^2 y'' - 6y = 5t^3 + 8t^2$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y = 2 \operatorname{ctg} t$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

Вариант 21

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x^2}{t^2}.$$

2. Найти такую кривую, чтобы треугольник, образованный нормалью и осями координат, был равновелик треугольнику, образуемому осью Ot , касательной и нормалью.

3. Проинтегрировать уравнение

$$(t^2 + 2tx - x^2) dt + (x^2 + 2tx - t^2) dx = 0.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(1+x^2) dt = (\operatorname{arctg} x - t) dx$, $x(0) = 0$.

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0) .

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$(3x^2 e^{2y} - y \sin x) dx + (2x^3 e^{2y} + \cos x) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$x \left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dx - y \left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dy = 0.$$

8. Сколько интегральных кривых уравнения $x'' = f(t, x)$ с непрерывными f и f'_x проходит через точку $(\pi/2, 1)$, касаясь графика функции $x = \sin t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = x\sqrt{1-x^4}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + \frac{a}{(x')^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $xx'^2 - 2tx' + x = 0$; б) $x = 2tx' + \sin x'$; в) $x(x - tx') = \sqrt{t^4 + x^4}$;
 г) $\frac{tx'}{x} + 2tx \ln t + 1 = 0$; д) $(t\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 + 1) dt = tx dx$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(t+1)x'' + t(x')^2 = x'$, $x(1) = -2$, $x'(1) = 4$.

13. Решить уравнения:

а) $y'' + 8y''' + 16y' = 0$; б) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} t \cdot \sin t - 3$;
 в) $y''' + y' = 3 \cos t + 21e^t$; г) $t^2 y'' - ty' + y = 8t^3$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y = \frac{1}{\sin t}$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = \pi/2$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Вариант 22

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения $x' = t^2 - 2x + 3$.

2. Найти кривую, у которой в каждой точке длина отрезка касательной между точкой касания и осью абсцисс равна длине отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс.

3. Проинтегрировать уравнение $tx' = 3x - 2t - 2\sqrt{tx - t^2}$.

4. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить гра-

фик: $t^2 x' \cos \frac{1}{t} - x \sin \frac{1}{t} = -1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1.$

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0) .

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$(3x \sin y + 1) dx + \left(\frac{3}{2} x^2 \cos y + 3 \right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$xy dx = (y^3 + x^2 y + x^2) dy.$$

8. Сколько существует решений уравнения $x^{(n)} = \sin(tx)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = |x|^\alpha$, где $\alpha > 0$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = 2tx' + \ln x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $(3t+1)x'^2 - 3(x+2)x' + 9 = 0$; б) $x = tx' + x'^2$; в) $\frac{x - tx'}{t + xx'} = 2$;
г) $tx' = t^2 e^{-x} + 2$; д) $x' = \sqrt[3]{2t - x} + 2$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x+1)^2 x'' = (x')^3, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

а) $y^v - 6y^{iv} + 9y''' = 0$; б) $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sh} t \cdot \sin 2t$;
в) $y'' + 16y = 16 \cos 4t + 22e^t$; г) $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y(\pi/6) = 4, \quad y'(\pi/6) = \frac{3\pi}{2}.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 23

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения $x' = t^2 - 2x^2 + 3$.
2. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ot , касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна a^2 .
3. Проинтегрировать уравнение $(\sqrt{t^2 + x^2} + t) dx - x dt = 0$.
4. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' \sin t + x \cos t = 1$, $x(t)$ ограничено при $t \rightarrow 0$.
5. Общее решение линейного уравнения имеет вид $x = A(t)C + B(t)$. Доказать обратное: дифференциальное уравнение всякого семейства кривых этого вида есть линейное уравнение первого порядка.
6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.
$$\left(3x^2 - \frac{y \cos x}{\sin^2 x}\right) dx + \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$
7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.
$$(x^2 - \sin^2 y) dx + x \sin 2y dy = 0.$$
8. При каких t_0 и x_0 имеет место единственность решения задачи Коши $x' = 1 + \sqrt[4]{x - t^2}$, $x(t_0) = x_0$?
9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + \frac{a}{2x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.
11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
а) $tx'^2 + tx' - x = 0$; б) $x = tx' + \frac{a}{x'^2}$; в) $2t^2 x' = x^2(2tx' - x)$;
г) $x' - 8t\sqrt{x} = \frac{4tx}{t^2 - 1}$; д) $x' + \operatorname{tg} x = t \sec x$.
12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $tx'' = \ln t + 1$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\text{vi}} + 64y = 0$; б) $y^{\text{iv}} + 5y'' + 4y = \sin t \cdot \cos 2t$;
в) $y''' - y'' = 3 \cos t + 23e^t$; г) $t^3 y'' - 2ty = 6 \ln t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3t}}{3 + e^{-3t}}$, $y(0) = 4 \ln 4$, $y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1)$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

Вариант 24

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = x - 3t + 6.$$

2. Найти кривую, у которой средняя ордината на отрезке $[0, t]$, то есть величина $\frac{1}{t} \int_0^t x ds$, пропорциональна ординате $x(t)$ точки кривой, лежащей в правом конце t отрезка $[0, t]$.

3. Проинтегрировать уравнение $(t + x - 2) dt + (t - x + 4) dx = 0$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $e^{t^2} x' + 2txe^{t^2} = t \sin t$, $x(0) = 1$.

5. Доказать, что линейное уравнение первого порядка остается линейным при любой замене независимой переменной $t = \varphi(\tau)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\left(3e^{3x} \operatorname{tg} y - \frac{1}{x^4} \right) dx + (e^{3x} \sec^2 y - 3y^2) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$y^2 dx + (e^x - y) dy = 0.$$

8. Для уравнения $x' = \sqrt[3]{x-1}$ выделить области, в которых через каждую точку проходит единственная интегральная кривая уравнения.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = \begin{cases} x^2 - x, & \text{если } x > 0, \\ |x|^{2/3}, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = -tx' + (x')^{5/2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $t^4 x'^2 - tx' - x = 0$; б) $x = \frac{3}{2}tx' + e^{x'}$; в) $t^2 x' = x(t + x)$;

г) $tx' = (t^2 + \operatorname{tg} x) \cos^2 x$; д) $x' = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x')^2 - 2xx'' - x^2 = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\text{iv}} - 5y'' + 4y = 0$; б) $y'' + 4y = \cos t \cdot \cos 3t - 4$;
в) $y''' + 100y' = 4 \sin 10t + 24e^{10t}$; г) $t^2 y'' - 3ty' + 5y = 3t^2$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

Вариант 25

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = x^2 + 2x - 3t.$$

2. Найти такую кривую, чтобы абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции, заключенной между осью Ot , кривой и прямыми $t = 0$, $t = t_0$, была равна $\frac{3}{4}t_0$.

3. Проинтегрировать уравнение $(2t - 2x - 1) dt + (t - x + 1) dx = 0$.

4. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' \cos t - x \sin t = -\sin 2t$, $\lim_{t \rightarrow \pi/2} x(t) = 0$.

5. Доказать, что линейное уравнение первого порядка остается линейным при любом линейном преобразовании искомой функции

$$x = \alpha(t)z + \beta(t).$$

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в

полных дифференциалах, найти его общий интеграл и особые решения.

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения.

$$y dx - x dy = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx.$$

8. На плоскости (t, x) выделить области, в которых уравнение $x' = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{t^2-x}$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности с условием Липшица.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = |2x-3t|$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t^2(1-x') = (x')^3$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $x'^2 - xx' + e^t = 0$; б) $x = tx'^2 - \frac{1}{x'}$; в) $tx' + t^2 + tx - x = 0$;

г) $x' = \frac{3t^2}{t^3+x+1}$; д) $x' = \left(\frac{3t+x^3-1}{x} \right)^2$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - 12x^2 = 0$, $x(0) = 1/2$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{iv} + 4y'' + 3y = 0$; б) $y'' - 4y' + 8y = e^{2t} \sin^2 t$;
в) $y''' - 100y' = 3 \cos 10t + 25e^{10t}$; г) $(5t+1)^2 y'' - 3(5t+1)y' + 4y = t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2+e^{-2t}}$, $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 10 \ln 3$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$