Домашняя контрольная работа по курсу

"Уравнения математической физики".

Вариант №1.

1. Найти общее решение следующего дифференциального уравнения.

$$x^2 z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y;$$

2. Решить следующую задачу Коши

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x^2, \quad z = x \text{ при } y = \frac{1}{4} - x^2;$$

3. Найти все α, при которых существует линейная замена переменных $(x, y) \to (t, z)$, переводящая уравнение

$$u_{xx} + 4u_{xy} - \alpha u_{yy} - \alpha u_x + \alpha^2 u_y = 0,$$

   - в уравнение струны $u_{tt} = u_{zz}$;
   - в уравнение теплопроводности $u_t = u_{zz}$.

4. Показать, что общее решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

имеет вид

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y), \quad v(x, y) = f(x + y) - g(x - y),$$

где f и g - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Для данной системы построить решения, удовлетворяющие условиям:

$$u(x, x) = \varphi(x), \quad v(x, -x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0.$$

5. Пусть $u(x, t)$ - решение в $[0, 1] \times \overline{R}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t),$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x^2(1 - x).$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^1 \left[u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)\right] dx.$

6. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u - x + 2\sin 2x \cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \ t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(\frac{\pi}{2}, t) = 1,$$
$$u(x,0) = x.$$

7. Найти преобразование Фурье $\widehat{f}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iyx}\, dx$ функции:

$$f(x) = e^{-|x|} \cos \omega x.$$

8. Найти косинус-преобразование Фурье $\widehat{f_c}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx$ функции:

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+b^2)}.$$

Домашняя контрольная работа по курсу
"Уравнения математической физики".

Вариант №2.

1. Найти общее решение следующего дифференциального уравнения.

$$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2;$$

2. Решить следующую задачу Коши

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z, \quad z=x+y \text{ при } y=x+1;$$

3. Найти все α, при которых существует линейная замена переменных $(x,y)\to(t,z)$, переводящая уравнение

$$u_{xx}+4u_{xy}-\alpha u_{yy}=0,$$

   - в уравнение струны $u_{tt}=u_{zz}$;
   - в уравнение теплопроводности $u_t=u_{zz}$.

4. Показать, что общее решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

имеет вид

$$u(x,y)=f(x+y)+g(x-y), \quad v(x,y)=f(x+y)-g(x-y),$$

где f и g - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Для данной системы построить решения, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad v(x,x)=\psi(x), \qquad x\geqslant 0.$$

5. Пусть $u(x,t)$ - решение в $[0,1]\times\overline{R}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t),$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,$$
$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=x^2(1-x)^2.$$

Найти $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^{1/2}\left[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right]\,dx.$

6. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 9u + 4\sin^2 t\cos 3x - 9x^2 - 2, \quad x \in (0,\pi)\,,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 2\pi,$$
$$u(x,0) = x^2 + 2.$$

7. Найти преобразование Фурье $\widehat{f}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iyx}\, dx$ функции:

$$f(x) = (2x+1)e^{-|x|}.$$

8. Найти косинус-преобразование Фурье $\widehat{f_c}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx$ функции:

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+b^2)^2}.$$