ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ». (2 СЕМЕСТР)

1. Комплексные числа и многочлены.

1.1*. Найти комплексные числа, сопряженные своим квадратам.

1.2*. Найти комплексные числа, сопряженные своим кубам.

1.3*. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

1.4*. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых?

1.5*. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен сумме модулей слагаемых?

1.6*. Используя формулу Муавра, выразить через $\cos x$ и $\sin x : \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 4x$.

1.7*. Представить в тригонометрической форме число $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

1.8*. Представить в тригонометрической форме число $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

1.9*. Представить в тригонометрической форме число $\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$

1.10*. Вычислить $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$

1.11*. Найти сумму всех корней n-й степени из 1.

1.12*. Решить уравнение $z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 6z - 2\sqrt{2} + 5 = 0$.

1.13*. Решить уравнение $z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 15z - 11\sqrt{2} = 0$.

1.14*. Решить уравнение $z^3 + 12z - 18i\sqrt{2} = 0$.

1.15*. Решить уравнение $z^3 + 6\sqrt{5}z^2 + 90z + 65\sqrt{5} = 0$.

2. Линейные пространства.

2.1*. Образует ли линейное пространство множество векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$, у которых все координаты x_i — целые числа, если
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$ и $\alpha\mathbf{x} = ([\alpha]x_1, [\alpha]x_2, \dots [\alpha]x_n)$ ($[\alpha]$ — обозначает целую часть числа α, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее α).

2.2*. Образует ли линейное пространство множество всех сходящися последовательностей?

2.3*. Образует ли линейное пространство множество всех расходящися последовательностей?

2.4*. Образует ли линейное пространство множество $C_{[a,b]}$ всех функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$?

2.5*. Образует ли линейное пространство множество всех функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$?

2.6*. Образует ли линейное пространство множество всех преобразований поворота пространства геометрических векторов вокруг фиксированной оси?

2.7*. Образует ли линейное пространство множество всех линейных преобразований пространства геометрических векторов?

2.8*. Является ли линейным подпространством в $C_{[a,b]}$ множество всех непрерывных функций, принимающих на концах отрезка $[a,b]$ равные значения?

2.9*. Доказать, что если $\tilde{e}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ — базисы линейного пространства L_n и T — матрицы перехода, то $T_{e\to g} = T_{e\to f} \cdot T_{f\to g}$

3. Линейные операторы.

3.1*. Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$ - собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\vec{x}+\vec{y}$ не является собственным вектором этого оператора.

3.2*. Как связаны между собой собственные значения и собственные векторы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$?

3.3*. Как связаны между собой собственные значения и собственные векторы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^2$?

3.4*. Пусть A — квадратная матрица 3-го порядка, матрица B получена из A перестановкой 1-ой и 2-ой строк, а также 1-го и 2-го столбцов. Найти невырожденную матрицу P, для которой $B = P^{-1}AP$.

3.5*. Линейный оператор $\hat{A} \neq \hat{I}$ удовлетворяет условию $\hat{A}^2 = \hat{I}$. Что можно сказать о собственных значениях оператора $\hat{A}$? Привести пример такого оператора.

3.6*. Линейный оператор $\hat{A} \neq \hat{O}$ удовлетворяет условию $\hat{A}^2 = \hat{O}$. Что можно сказать о собственных значениях оператора $\hat{A}$? Привести пример такого оператора.

3.7*. Линейный оператор $\hat{A} : \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_2$, $\hat{A} \neq \hat{O}$ удовлетворяет условию $\ker \hat{A} = \operatorname{im} \hat{A}$. Найти все возможные типы оператора $\hat{A}$. Для каждого типа найти $\ker \hat{A}$.

3.8*. Доказать, что: а) оператор $\hat{A}$ имеет обратный в том и только в том случае, когда он не имеет нулевых собственных значений;
б) если оператор $\hat{A}$ имеет обратный, то $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы. Как связаны между собой собственные значения этих операторов?

4. Билинейные и квадратичные формы.

4.1*. Доказать, что $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$ является билинейной формой, где $\mathbf{x} = x(t) \in C_{[a,b]}$, $\mathbf{y} = y(t) \in C_{[a,b]}$, $K(s,t)$ – некоторая функция двух переменных,

4.2*. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Найти ее матрицу в базисе $\tilde{e} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (1,1,1)$, $\vec{e_2} = (1,1,-1)$, $\vec{e_3} = (1,-1,-1)$

4.3*. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задана билинейная форма $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$ в базисе $\tilde{e}$. Найти ее матрицу в базисе $\tilde{f}$, если $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.4*. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат
$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$

4.5*. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат
$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$

4.6*. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат
$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$

5. Евклидовы пространства.

5.1*. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 введено скалярное произведение по формуле $(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Найти длины векторов $p(t) = 1 - t + t^2$, $q(t) = t$ и угол между ними. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.2*. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 задано формулой $(p,q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Проверить, что для векторов $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = t$ выполнено неравенство Коши-Буняковского. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.3*. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 задано формулой $(p,q) = \int_0^1 (1+t)p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Найти нормы многочленов $p(t) = 1 + t$, $q(t) = t^2$ и угол между ними. Составить матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.4*. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 задано формулой $(p,q) = \int_0^1 t^2 p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Проверить, что для многочленов $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = t$ выполнено неравенство Коши-Буняковского. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.5*. Доказать, что скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_n$ многочленов степени не выше n может быть задано формулой $(p,q) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} p(t_k)q(t_k)$, где все t_k, $k = 1, \ldots, n+1$ различны.

5.6*. Пусть L_1 и L_2 — линейные подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^n$, причем $\dim L_1 < \dim L_2$. Доказать, что в L_2 найдется ненулевой вектор, ортогональный ко всем векторам из L_1.

5.7*. Доказать, что в действительном евклидовом пространстве справедлива теорема Пифагора, а также ей обратная: два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2$

5.8*. Доказать теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

5.9*. Доказать, что если вектор $\vec{x}$ евклидова пространства ортогонален к каждому из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$, то он ортогонален к любому вектору из их линейной оболочки $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k \rangle$. Вывести отсюда школьную теорему о трех перпендикулярах.

5.10*. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к каноническому базису, если скалярное произведение задано формулой $(p,q) = \int\limits_{-2}^{4} p(t)q(t)dt$

5.11*. Доказать, что линейный оператор $\hat{A}$, заданный в базисе $\tilde{f}$ матрицей
$$A_f = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
является самосопряженным, если $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ и базис $\tilde{e}$ — ортонормированный. Найти ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$.