УДК 519.1

Фридлендер Б.И., Хаиров Р.А. Элементы булевой алгебры: Учебное пособие/МТУСИ. – М., 2005. – 40 с.

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров, магистров и дипломированных инженеров по направлению 550400 – Телекоммуникации. Текст и задание на курсовую работу составлены на основе многолетнего опыта преподавания авторами курса «Дискретная математика».

Илл. 12, табл. 32, список лит. – 5 назв.

Издание утверждено методическим советом ОТФ в качестве учебного пособия. Протокол № 3 от 17 мая 2005 г.

Рецензенты: Овсянникова О.Б.
Кюркчан А.Г.,
Шакин В.Н.

1. Операции над множествами

Обозначим заглавными буквами (A, B,...) такие группы элементов, в которых каждая группа элементов обладает некоторыми общими свойствами. Если элемент «a» принадлежит A, то записывают $a \in A$. Число элементов в каждой группе может быть конечное или бесконечное. Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то пишут $A \subset B$. Если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$, это свойство транзитивности.

Пример. (Эйлер) Если деньги в кошельке и кошелек в кармане, то деньги в кармане.

Объединением множеств $A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

Пересечением множеств $A \cap B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B.

$A \backslash B$ – разность множеств A и B; это подмножество, принадлежащее A, но не B.

$|A|$ - число элементов, принадлежащих A.

M – множество элементов $A \cup B \cup C \cup ...$, т.е. объединение данных множеств.

Если K – любое подмножество элементов M, то $\overline{K}$ - подмножество элементов, принадлежащих M, но не принадлежащих K, т.е. отрицание K ($\overline{K} = M \backslash K$).

Алгеброй называется совокупность множества M с заданными на нем операциями S над элементами множества M и обозначается $\mathrm{A} = \langle M, S \rangle$, где A – алгебра, M – носитель, S – сигнатура.

Алгебра Кантора: $\mathrm{A} = \langle M, \cup, \cap, \bar{\ } \rangle$, где $S = \langle \cup, \cap, \bar{\ } \rangle$.

Диаграмма Венна. Множество M состоит из внутренних точек квадрата. Внутренние точки кругов A и B являются элементами этих множеств A и B, рис. 1. На рис. 1 заштрихованы подмножества $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $A \backslash B$.

Пусть M – конечное множество. Пустое множество обозначается значком $\varnothing$. Совокупность всех подмножеств множества M (включая $\varnothing$) обозначается через 2^M и называется булеаном. Число таких подмножеств равно $2^{|M|}$. Для произвольных $A, B, C \subset M$ выполняются соотношения:

1. Закон ассоциативности $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
2. Закон коммутативности $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
3. Закон поглощения $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$.
4. Закон дистрибутивности $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. Закон дополнения $A \cup M = M$, $A \cap M = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = M$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Задача. Убедитесь в справедливости этих законов с помощью диаграммы Венна.

Пример. Правила де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ доказывается геометрически с помощью диаграммы Венна.

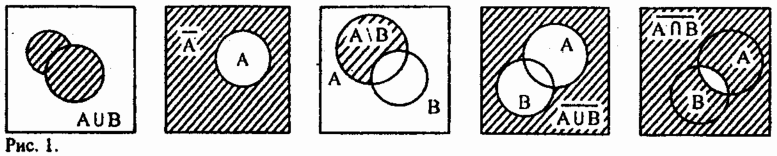


Рис. 1.

Если каждому элементу из множества A соответствует какой-то элемент из B, то говорят, что задано отображение $A \to B$. Если $a \in A$, $b \in B$ то $b = \varphi(a)$, при этом $\varphi(a)$ называются образом a; «a» - прообразом «b».Отображение $A \to A$ называется унарной операцией, например, операция $\bar{A}$. Операции $A \cup B$, $A \cap B$ – бинарные операции.
Обозначим через * какую-либо операцию. Множество $A * A \to A$ обозначает прямое произведение двух элементов, принадлежащих A, которые отображаются на элемент, тоже принадлежащий A. Это тоже бинарная операция. Аналогично определяется к-арная операция: $A * A * \ldots * A$

2.Определение булевой алгебры

Определенная выше алгебра Кантора является частным случаем булевой алгебры. Алгебра $A = \langle M, \bar{}, \vee, \wedge \rangle$, где «$\bar{}$» отрицание (унарная операция), $\vee$ – дизъюнкция, $\wedge$ – конъюнкция ($\vee$ и $\wedge$ – бинарная операция).

Для любых элементов $a,b,c \in M$ выполняются следующие пять законов:

1. ассоциативности $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c); (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$. (2.1)
2. коммутативности $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$. (2.2)
3. поглощения $(a \vee b) \wedge a = a$, $(a \wedge b) \vee a = a$. (2.3)
4. дистрибутивности $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c); a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. (2.4)
5. закон дополнения: в носителе M существуют такие элементы 1 и 0, что $a \vee 1 = 1$; $a \wedge 1 = a$; $a \vee 0 = a$; $a \wedge 0 = 0$ и что $\forall a \in M \ \exists \ \bar{a}$ такой, что $a \vee \bar{a} = 1$, $a \wedge \bar{a} = 0$. (2.5)

Основные выводы из законов булевой алгебры.

1. Закон тождественности $a \vee a = a$.
2. Элементы 1 и 0 закона дополнения определяются аналогично алгебры Кантора M и $\varnothing$.
3. Правило де Моргана $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$; $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$.
4. Для каждого элемента $a \in M$ существует только один дополнительный элемент $\bar{a}$, удовлетворяющий правилам $a \vee \bar{a} = 1$, $a \wedge \bar{a} = 0$.
5. $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.
6. Скобки $(a \vee b) \vee c$; $(a \wedge b) \wedge c$ можно не ставить.
7. $\bar{\bar{a}} = a$.

8. Если в формулах, построенных на сигнатуре $S = \{\vee, \wedge, -\}$, поменять местами операции $\vee$ и $\wedge$, то справедливость равенства не изменится (см. 2.1 – 2.4). Это наблюдается и в законе (2.5), только вместо 1 следует поставить 0, а вместо 0 поставить 1, что называется <u>принципом двойственности</u> булевой алгебры.

<u>Пример.</u> Сравните законы де Моргана $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ и $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$.

3. Аргументы булевых функций

Рассмотрим множество из двух элементов $V_1\{0;1\}$. V_1 является моделью логического высказывания: ложь и истина, основные понятия алгебры логики. Составим $V_n = V_1 * V_1 * \ldots V_1$-прямое произведение V_1 на себя. V_n-совокупность всех упорядоченных чисел, каждое из которых или 0, или 1. Число всех комбинаций $V_n = \{a_1 a_2 \ldots a_n\}$ равно 2^n. Но это не вектор в n – мерном линейном пространстве, операции линейной алгебры здесь не применимы. V_n следует понимать как n упорядоченных чисел.

1. Представление V_n в форме целых чисел. Каждый элемент $V_n = \{a_1 \ldots a_n\}$ можно представить в форме целого числа в двоичном коде, аналогично привычному десятичному коду.

<u>Пример.</u> Число 1001 в двоичном коде равно: $1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 8+0+0+1 = 9$. Число 9 однозначно определяет элемент из V_4.

<u>Пример.</u> Перечислим все элементы из $V_3 : \{000;\ 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111\}$. Всего $2^3 = 8$ элементов.

2. Представление V_n в форме вершин n -мерного куба

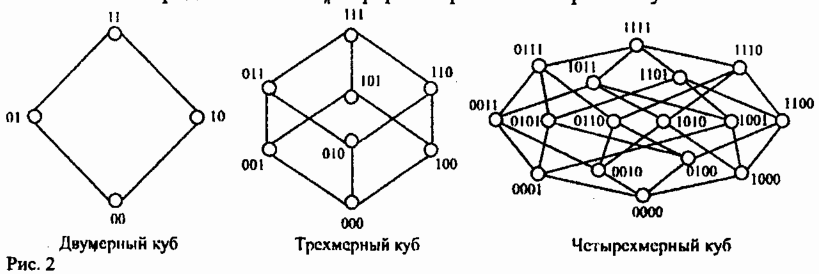


Рис. 2

Каждая вершина n-мерного куба имеет n соседних вершин, с которыми соединена ребрами.

Двум любым элементам V_n ставится в соответствие целое число, которое называется расстоянием Хэмминга. Расстояние между $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ и $(b_1 b_2 \ldots b_n)$ равно числу пар (a_i, b_i), в которых $a_i \neq b_i$. Например, расстояние Хэмминга между (0110110) и (0101010) равно трем, а между (1010) и (1110) равно единице. Расстояние Хэмминга между двумя вершинами n-мерного куба равно наименьшему числу ребер, соединяющих эти вершины. Число единиц в любом элементе V_n называется весом этого элемента и обозначается $W(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)$.

4. Определение булевой функции

Булева функция f может принимать одно из двух значений: или 0, или 1 - и является отображением множества V_n на множества V_1. Обозначим булевы переменные множеством $X(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

1. Табличный способ представления функций называется таблицей истинности.
Пример.

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Табл. № 1

Каждая строчка таблицы обозначает число в двоичном коде. Например, четвертая строчка – строчка 011 равна трем. Всего строчек восемь (2^3) и им соответствуют числа 0, 1, …7. В последнем столбце представлены значения функции,соответствующие перебору аргументов $(x_1 x_2 x_3)$.

Рассмотрим множество всевозможных функций β_n.Выделим все подмножества множества V_n, имеющие единичное значение функций. Таких подмножеств будет булеан, т.е. $2^{|V_n|}$. Но $|V_n| = 2^n$. Поэтому общее число различных функций равно $|\beta_n| = 2^{2^n}$.

Например, если $n = 2$, то $|\beta_2| = 2^{2^2} = 16$.

X_1	X_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	[illegible]	[illegible]
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Табл. № 2

2. Аналитический способ задания булевых функций основан на операциях $\{-,\vee,\wedge\}$. Заметим, что конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ часто обозначается иначе: $x_1 \& x_2$ или просто $x_1 x_2$.

Таблицы истинности имеют вид:

X_1	X_2	$X_1 \vee X$	$X_1 \& X_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Табл. № 3

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Табл. №4

Правило старшинства логических выражений, содержащих $\{- \vee \wedge\}$ по аналогии с арифметикой,такое: сначала выполняются отрицания, затем конъюнкция и наконец дизъюнкция, если это не противоречит расставленным скобкам.
Например: $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_4 x_5$.Если $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $x_2 = x_5 = 0$, то $f = 1\bar{0} \vee 1\,\bar{1}\,0 = 1 \vee 0 = 1$.

Выражения вида $(x_i \& x_{i2} \& x_{i3} \ldots \& x_{ir})$ или $(x_{i1}\bar{x}_{i2}x_{i3}\ldots\bar{x}_{ir})$ называются элементарной конъюнкцией. Элементарной дизъюнкцией называется выражение вида $(x_i \vee x_{i2} \vee x_{i3} \ldots \vee x_{ir})$. Здесь r - количество переменных, которые называются порядком конъюнкции или дизъюнкции. На основании теоремы Шеннона любая булевая функция может быть представлена в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ): $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_n = \vee_j t_j$, где t_j - некоторая максимальная конъюнкция вида $t_i = x_1\bar{x}_2 x_3 \ldots \bar{x}_n$.

Примеры: $x_1\bar{x}_3 x_5$ – элементарная конъюнкция.

$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$ – максимальная конъюнкция.

$x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$ – совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) с $n = 4$.

Правило записи СДНФ.

Пусть функция задана таблицей истинности. Выделим строки таблицы $(x_1\bar{x}_2 x_3 \ldots \bar{x}_n)$, в которых значение функции f равно единице. Из соответствующих переборов аргументов этих строк составляем выражение вида $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_n = x_1\bar{x}_2 \ldots x_n \vee x_1 \ldots \bar{x}_n \vee \bar{x}_1 \ldots x_n$, причем, в каждой строке, которая определяет максимальную конъюнкцию,проставляется x_i, если в таблице истинности стоит единица, и $\bar{x}_i$, если стоит 0.

Пример. Составим СДНФ по таблице истинности (табл. 1):

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 .$$

Замечание. Согласно принципу двойственности (см. п.2) построим двойственную к СДНФ функцию, которая называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ), и в которой вместо единиц как при построении СДНФ выбираются нули, а вместо операций $\vee$ и $\&$ проставляются соответственно $\&$ и $\vee$. Строки в таблице истинности выбираются те, в которых функция f нулевая.

Пример. Шестая строчка таблицы истинности (табл. 1), функция равна нулю, а аргументы равны $(x_1 x_2 x_3) = (101)$,тогда соответствующая максимальная дизъюнкция будет такой: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$.

СКНФ рассматриваемого примера имеет вид:

$$f(x_1 x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только СДНФ. Если в правом столбце f таблицы истинности нулей больше,чем единиц, то лучше функцию записать в форме СКНФ.

Так как каждая строчка перебора аргументов в таблице истинности может быть записана в форме целого числа в двоичном или десятичном коде, то запись булевой функции в СДНФ может быть сокращена.

Например, наша функция может быть представлена в форме $f = (x_1 x_2 x_3) = (010) \vee (011) \vee (110)$, или еще короче $f = \vee(2,3,6)$.

Пример СДНФ. $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 = \vee(2,6,10)$

Вернемся к булевым функциям от двух переменных $f(x_1x_2)$, которых, как известно, шестнадцать. Таблица истинности содержит $2^n = 2^2 = 4$ возможных переборов неизвестных. Индекс i функции f_i определяется значением числа i, записанного в двоичном коде. Например, f_{13} примет значения 1101, а f_7-0111 см. табл. 5.

f_0 и f_{15} – постоянные функции 0 и 1 называются фиктивными переменными. В функциях f_3 и f_{12} фиксирован аргумент x_2, а в функциях f_5 и f_{10} фиксирован x_1. Таким образом, из 16 функций шесть имеют фиктивные аргументы. Таблица 5 содержит названия и основные данные всех функций двух аргументов.

Номер функции	x_1	0	0	1	1	Наименование функции	Обозначение	Формула
	x_2	0	1	0	1			
0	f_0	0	0	0	0	Константа нуль	$f_0 = 0 = f_{15}$	$f_0 = 0$
1	f_1	0	0	0	1	Конъюнкция (И)	$f_1 = x_1 \& x_2 = \bar{f}_{14}$	$f_1 = x_1x_2$
2	f_2	0	0	1	0	Запрет 1-го аргумента	$f_2 = x_1 \leftarrow x_2 = \bar{f}_{13}$	$f_2 = x_1x_2$
3	f_3	0	0	1	1	Повторение x_1	$f_3 = x_1 = \bar{f}_{12}$	$f_3 = x_1$
4	f_4	0	1	0	0	Запрет 2-го аргумента	$f_4 = x_2 \leftarrow x_1 = \bar{f}_{11}$	$f_4 = \bar{x}_1 \wedge x_2$
5	f_5	0	1	0	1	Повторение x_2	$f_5 = x_2 = \bar{f}_{10}$	$f_5 = x_2$
6	f_6	0	1	1	0	Сложение по модулю 2	$f_6 = x_1 \oplus x_2 = \bar{f}_9$	$f_6 = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$
7	f_7	0	1	1	1	Дизъюнкция (ИЛИ)	$f_7 = x_1 \vee x_2 = \bar{f}_8$	$f_7 = x_1 \vee x_2$
8	f_8	1	0	0	0	Операция Пирса (ИЛИ-НЕ)	$f_8 = x_1 \downarrow x_2 = \bar{f}_7$	$f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$
9	f_9	1	0	0	1	Эквивалентность (И-И)	$f_9 = x_1 \infty x_2 = \bar{f}_6$	$f_9 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$
10	f_{10}	1	0	1	0	Отрицание x_2	$f_{10} = \bar{x}_2 = \bar{f}_5$	$f_{10} = \bar{x}_2$
11	f_{11}	1	0	1	1	Импликация от x_2 к x_1	$f_{11} = x_2 \rightarrow x_1 = \bar{f}_4$	$f_{11} = x_1 \vee \bar{x}_2$
12	f_{12}	1	1	0	0	Отрицание x_1	$f_{12} = \bar{x}_1 = \bar{f}_3$	$f_{12} = \bar{x}_1$
13	f_{13}	1	1	0	1	Импликация от x_1 к x_2	$f_{13} = x_1 \rightarrow x_2 = \bar{f}_2$	$f_{13} = \bar{x}_1 \vee x_2$
14	f_{14}	1	1	1	0	Операция Шеффера (И-НЕ)	$f_{14} = x_1 / x_2 = \bar{f}_1$	$f_{14} = \overline{x_1x_2}$
15	f_{15}	1	1	1	1	Константа единица	$f_{15} = 1 = \bar{f}_0$	$f_{15} = 1$

Табл. № 5

Суперпозицией функций называется такая $f(x_1 \ldots x_n)$, которая получается:

а) последовательным применением друг за другом нескольких составляющих функций;

б) переименованием переменных;

в) неоднократным применением пунктов а) и б).

Пример из элементарной алгебры. Пусть сигнатурой является сложение и умножение чисел, для которых есть преобразователи $\boxed{+}$ и $\boxed{\cdot}$. Тогда $f = x^2y + xy + 1$ может быть вычислена по следующей схеме на рис. 3:

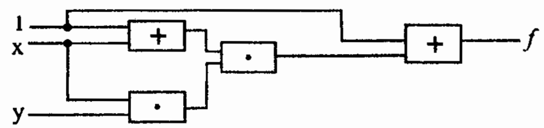


Рис.3

Применяя приведенные унарные и бинарные функции (табл. № 5), с помощью принципа суперпозиции можно получить более сложные функции от n переменных. Множество функций $[K]$ называется замыканием множества K, если оно содержит все суперпозиции множества K и не содержит никаких других функций.

Пример. Пусть в множестве V_3 задана одна функция: $K = \{-\}$. Очевидно, что $[K] = \{x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$.

5.Полнота и базис булевых функций

Рассмотрим систему булевых функций $S = \{f_1, f_2, ..., f_r\}$. Булевая функция f является представимой в системе S, если ее можно представить в виде суперпозиции системы функций S. Система S называется полной, если в ней представима любая функция, принадлежащая β_n. Например, построение любой функции в СДНФ или СКНФ показало, что множество $S = \{-, \wedge, \vee\}$ является полным. Более того, можно обойтись и двумя функциями в системе: $\{-, \vee\}$ или $\{-, \wedge\}$. Пользуясь законом де Моргана $a \vee b = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$, можно представить дизъюнкцию в форме суперпозиции отрицания и конъюнкции. Тем самым доказано, что не только система $\{-, \wedge, \vee\}$ является полной, но и $\{-, \wedge\}$. Аналогично доказывается полнота $\{-, \wedge\}$.

Для установления факта полноты какой-нибудь системы функций достаточно выразить через эту систему функции «–» и «v».

Пример. Импликация «→» и постоянная «0» (f_{11}, f_0) обладают свойством полноты, так как $\bar{a} = \bar{a} \vee 0 = a \rightarrow 0$, $a \vee b = \bar{\bar{a}} \vee b = \bar{a} \rightarrow b = (a \rightarrow 0) \rightarrow b$ (см. табл. № 6).

Базисом называется такая полная система функций S, у которой любая ее подсистема не образует полную систему.

Например, $S = \{-, \wedge, \vee\}$ полная система, но не является базисом, а $\{-, \vee\}$ и $\{-, \wedge\}$ уже базисы. Для того, чтобы установить, является ли система S базисом, нужно проверить, полна ли она и является ли она неизбыточной.

Приводим таблицу базисов, применяемых в настоящее время :

№	Обозначение базиса	Название базиса
1	$\{\downarrow\}=\{f_8\}$	базис Пирса
2	$\{\mid\}=\{f_{14}\}$	базис Шеффера
3	$\{\to,0\}=\{f_{13},f_0\}$	импликативный базис
4	$\{\leftarrow,-\}=\{f_2,f_{12}\}$	коимпликативный базис
5	$\{\to,-\}=\{f_{13},f_{12}\}$	импликативный базис
6	$\{\&,-\}=\{f_1,f_{12}\}$	конъюнктивный базис Буля
7	$\{\vee,-\}=\{f_7,f_{12}\}$	дизъюнктивный базис Буля
8	$\{\leftarrow,1\}=\{f_2,f_{15}\}$	коимпликативный базис
9	$\{\oplus,\&,1\}=\{f_6,f_1,f_{15}\}$	базис Жигалкина

Табл. № 6

Отметим, что базис Пирса и базис Шеффера содержат только одну функцию, через которую выражены $\{-,\wedge,\vee\}$. Импликативный базис $\{\to,0\}$ и коимпликативный базис $\{\leftarrow,1\}$ практически тоже содержат одну функцию, так как вторая является постоянной (0 и 1 - фиктивные функции). Из таблицы следует, что применяемые в настоящее время базисы содержат одну, две и три функции. Трудно сказать, какие ЭВМ будут изобретены и какие базисы в будущих поколениях ЭВМ выгодно будет применять, но в настоящее время базисы Шеффера $\{f_{14}\}$ и Пирса $\{f_8\}$ применяются на полупроводниках, а базисы импликативный и коимпликативный – при использовании магнитных явлений; базис Жигалкина – при арифметических расчетах в двоичном коде.

6. Простейшие способы минимизации булевых функций, представленных в ДНФ

Если функция представлена в СДНФ, то эта форма может быть представлена единственным образом. Число максимальных конъюнкций t_i равно числу единиц в столбце f таблицы истинности. Если СДНФ содержит «k» максимальных конъюнкций из V_n, то за сложность аналитической формы принимают величину nk (по числу операций без учета отрицаний). Но если функция представлена в ДНФ, с меньшим числом конъюнкций и меньшим числом сомножителей, то сложность формы может значительно сократиться. Если конъюнкция t_i содержит n_i сомножителей, то сложность ее равна $\sum_i n_i$. Такая оценка сложности формул по Квайну принята и удобна . Из множества ДНФ выбирают форму с наименьшей $\sum_i n_i$.

Пример. Заданная СДНФ имеет вид

$$f=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\vee\bar{x}_1x_2x_3x_4\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\vee x_1\bar{x}_2x_3x_4$$

ранга $n=4$ с числом конъюнкций $k=5$. Сложность $c=nk=20$. Можно проверить, что заданная функция в оптимальном варианте ДНФ имеет вид $f=\bar{x}_2x_4\vee\bar{x}_1x_3x_4$ сложности $c=5$. Заметим, что число операций можно еще

иногда уменьшить, если, воспользовавшись свойством дистрибутивности, перейти к скобочной форме $f=x_4(\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_3)$. Приведем два простейших упрощения логических операций .

1. Склеивание является следствием свойства дистрибутивности булевой алгебры. Две элементарные конъюнкции называются соседними, если они являются функциями одних и тех же аргументов, отличающихся только знаком отрицания одного из сомножителей. Например, $t_1=\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5$ и $t_2=\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4x_5$ отличаются только одним сомножителем: x_4 и $\bar{x}_4$. Тогда $f=t_1\vee t_2=\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\vee\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4x_5=\bar{x}_1x_2x_3x_5(x_4\vee\bar{x}_4)=\bar{x}_1x_2x_3x_5I=\bar{x}_1x_2x_3x_5$.При склеивании сложность уменьшилась от $C=10$ до $C=4$.

2. Склеивание в алгебре Кантора:

$(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=A\cap(B\cup\bar{B})=A\cap M=A$.

Упрощение поглощением. Логическую сумму двух элементарных произведений различных рангов, из которых одно является частью другого, можно заменить слагаемым, имеющим меньший ранг, следуя закону поглощения. Сначала рассмотрим поглощение в алгебре Кантора. Пусть $A\cap B\subset C$ (см. рис. 4). Из диаграммы Венна следует $(A\cap B)\cup C=C$.

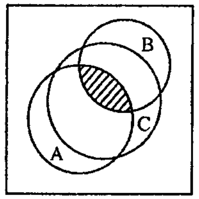


Рис. № 4

Пример. $\bar{x}_1x_2x_7\bar{x}_{10}\vee x_7\bar{x}_{10}=x_7\bar{x}_{10}$. Замечание. Склеивание и поглощение применяются не только при упрощении ДНФ, но и при упрощении конъюнктивной нормальной формы:

Пример на склеивание КНФ:

$(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)=[(x_1\vee\bar{x}_2)\vee x_3]\wedge[(x_1\vee\bar{x}_2)\vee\bar{x}_3]=(x_1\vee\bar{x}_2)$, так как $x_3\wedge\bar{x}_3=0$.

Пример на поглощение КНФ: $(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3\vee x_4)\wedge(\bar{x}_3\vee x_4)=\bar{x}_3\vee x_4$.

7. Задача покрытия

Рассмотрим двоичную таблицу с элементами 0 и 1. Говорят, что строка i покрывает столбец j, если элемент таблицы (ij) равен единице. Покрытием называется множество строк, удовлетворяющих двум условиям:

1.Всякий столбец покрывается хотя бы одной строкой этого множества.

2.При удалении любой строки этого множества для оставшегося множества строк первое условие не выполняется.

Рассмотрим логическую таблицу, в которой для удобства нули не изображены, а строки для наглядности обозначены латинскими буквами, как в шахматах (табл. № 7). Здесь строка d покрывает столбцы 3 и 6, а столбец 5 покрывается строками a,b и c. Множество $\{a,b,c\}$ образует покрытие, и никакие две строки не покрывают все столбцы. Множество $\{bcde\}$ покрывает все столбцы, но покрытием не является. Для нахождения всех покрытий применим метод Петрика. Метод заключается в составлении дизъюнкций для каждого столбца из отличных от нуля элементов в этих столбцах и в составлении конъюнкций из полученных дизъюнкций. Полученное выражение должно быть преобразовано в дизъюнкции конъюнкций с помощью свойств дистрибутивности и поглощения. Поясним метод следующим примером.

Пример. Первому столбцу табл. № 7 соответствует дизъюнкция $a \vee e$, второму – дизъюнкция $b \vee e$ и т.д. Функция, определяющая множества покрытий, имеет вид:

$$f = (a \vee e)(b \vee e)(b \vee d)(a \vee c)(a \vee b \vee c)(c \vee d \vee e)\,. \qquad (7.1)$$

Эта функция означает, что покрытие всех столбцов произойдет, когда будут выбраны такие строки, что функция f останется после преобразований единичной. Раскрывая скобки, применяя свойство дистрибутивности $(a \vee b)(a \vee c) = a \vee bc$, см. рис. №5, получаем $f = (a \vee ec)(b \vee ed)[c \vee \{(a \vee b)(d \vee e)\}]$. Раскрывая скобки, применяя законы (2.3) и (2.4), рис. № 5, получаем

$$f = (a \vee ed)(b \vee ed)[c \vee a(d \vee e)] = edc \vee abc \vee eda \vee abd \vee abe\,. \quad (7.2)$$

	1	2	3	4	5	6
a	1			1	1	
b		1	1		1	
c				1	1	1
d			1			1
e	1	1				1

Таблица № 7

Таким образом, имеем пять покрытий: $\{edc\}$, $\{abc\}$, $\{eda\}$, $\{abd\}$ и $\{abc\}$. Поясним результат. Если функция задана в конъюнктивной форме (7.1), то она равна единице. Если же функция задана в дизъюнктивной форме (7.2), то $f = 1$ тогда, когда хотя бы одна скобка с конъюнкцией равна единице. Поэтому равенство единице отдельной конъюнкции (например, (abc)) ведет к равенству единице (7.1), а значит и к покрытию всех столбцов матрицы.

Для нахождения минимального покрытия применим метод сжатия таблицы. Выделим обязательные строки, которые должны войти в покрытие. Выделим те строки, которые покрывают одной строкой один столбец. Если

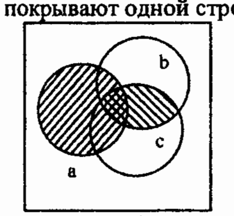


Рис. 5

такие строки есть, то учитывая, что эти строки обязательно входят в покрытие, их можно исключить из рассмотрения. Вместе с этими строками можно исключить и те столбцы, которые они покрывают. После удаления таких строк и столбцов таблица упрощается. Например, в таблице № 8 столбец 2 покрывается строкой b, а столбец 5 – строкой e. Следовательно, строки b и e обязательные и входят в покрытие. Кроме того, они покрывают столбцы 3 и 4. Строим новую таблицу без строк b и e и столбцов 2, 3, 4 и 5. В таблице № 9 строка d обязательна, так как только она покрывает столбец 7. Если убрать d и столбец 7, получим новую таблицу с тривиальным покрытием $\{bead\}$ и $\{becd\}$.

	1	2	3	4	5	6	7
a	1		1			1	
b		1	1				
c	1			1		1	1
d	1			1			1
e			1	1	1		

Таблица № 8

	1	6	7
a	1	1	
c	1	1	
d	1		1

Таблица № 9

Пример. Табл. № 10 ~~столбец 2 [illegible] столбец 4 и 5. Следовательно,~~ столбцы 4 и 5 можно убрать. Строка d поглощает строки b и e, следовательно, строки e и b можно убрать. Получаем новую таблицу № 11. Строка d обязательная, она покрывает столбцы 2 и 6. Эти столбцы, как и строки, убираются. В новой таблице покрытие осуществляет одна строка «c». Поэтому таблицу № 10 покрывают две строки $\{d,c\}$.

	1	2	3	4	5	6
a	1					1
b		1			1	1
c	1		1			
d		1		1	1	1
e		1		1		
f			1			

Таблица № 10

	1	2	3	6
a	1			1
c	1		1	
d		1		1
f			1	

Таблица № 11

	1	3
a	1	
c	1	1
f		1

Таблица № 12

Приведем критерий Поста и таблицу Поста, с помощью которой можно назвать все функции из числа $f_0 - f_{15}$, которые образуют базис. Рассмотрим пять классов функций, к которым или принадлежат, или не принадлежат функции: 1) K_0 - класс, сохраняющий нуль, т.е. $f(00...0) = 0$; 2) K_1 - класс, сохраняющий единицу, т.е. $f(11...1) = 1$; 3) $K_\wedge$ - класс линейных функций, т.е. функций, представимых полиномом Жигалкина $f(x_1x_2...x_n) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus ... \oplus C_nx_n$; 4) K_C - класс самодвойственных функций, т.е. $f(x_1x_2...x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1\bar{x}_2...\bar{x}_n)$, 5) K_M - класс монотонных функций. Пусть $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \le X^{**}(x^{**}_1, x^{**}_2, ..., x^{**}_n)$, $x_i^* \le x_i^{**}$ при $i = 1,2,...,n$. Тогда $f(x^*) \le f(x^{**})$ и $f(x) \in K_M$.

В таблице Поста отмечены все функции двух переменных, которые не принадлежат к классу данного столбца.

		Наименование функции	Нелинейность	Несохраняемость нуля	Несохраняемость единицы	Несамодвойственность	Немонотонность
	a	Константа 0 f_0			■	■	
√	b	Конъюнкция f_1	■			■	
	c	Запрет f_2, f_4	■		■	■	■
	d	Повторение f_3, f_5					
	e	Неравнозначность f_6			■	■	■
√	f	Дизъюнкция f_7	■			■	
	g	Операция Пирса f_8	■	■	■	■	■
	h	Эквивалентность f_9		■		■	■
√	i	Отрицание f_{10}, f_{12}		■	■		■
	j	Импликация f_{11}, f_{13}	■	■		■	■
	k	Операция Шеффера f_{14}	■	■	■	■	■
	l	Константа 1 f_{15}		■			

Критерий полноты Поста. Для того, чтобы множество функций $S=\{f_k\}$ было полным , необходимо и достаточно , чтобы в каждом столбце таблицы множества функций S была хотя бы одна заштрихованная ячейка. Если выбрать из 12 строк такие, которые осуществляли покрытие столбцов, то функции, определенные этими строками,являются базисом.

Пример. Строка g и строка k покрывают все 5 столбцов каждая, поэтому функция f_8 Пирса и функция f_{14} Шеффера являются базисными. Строки b, f, i также покрывают все столбцы и система функций $\{f_1, f_7, f_{10}\}$ обладают свойством полноты , но это не базис , так как строки не являются покрытием. Но $\{f_1, f_{10}\}$ и $\{f_7, f_{10}\}$ являются покрытием и образуют базисы.

8. Минимизация булевых функций

Пусть задана СДНФ булевой функции от n переменных $f(x_1 x_2 ... x_n)$. Минимизируем функцию, то есть найдем ДНФ минимальной сложности. Методом склеивания отдельных конъюнкций $t_i = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 ... \bar{x}_n$ упростим СДНФ $f = \vee_i t_i$. Сначала упростим запись формулы в СДНФ. Если в некоторой конъюнкции стоит выражение $t_i = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \cdots x_n$, то вместо аргумента без отрицания ставим единицу, а вместо аргумента с отрицанием ставим нуль. Таким образом, некоторая функция принимает вид: $f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = (0100) \vee (0110) \vee (0111) \vee (1000) \vee (1110) \vee (1111)$.

Каждой максимальной конъюнкции СДНФ соответствует целое число в двоичном коде. Функция принимает компактный вид: $f = \vee(4,6,7,8,14,15)$.

Сложность такой функции равна $4*6=24$. Упрощение производится в два этапа.

Этап 1. Склеивание. Рассмотрим теперь такую функцию: $f = \vee(0,1,3,4,5,11,12,14,15)$. Сложность ее $4*9=36$. В столбик ~~записываем~~ каждую конъюнкцию в двоичном коде

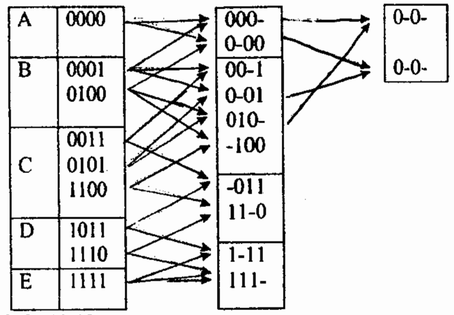


Табл. № 13

Перед склеиванием располагаем двоичные наборы по поясам, друг под другом, чтобы в каждом поясе число единиц было одним и тем же, например, в поясе D каждое число содержит три единицы, а в поясе C каждое из чисел – по две единицы. Рассмотрим для любой пары соседних поясов (табл. № 13) попарно все двоичные наборы (один набор из одного пояса, другой – из соседнего). Если наборы в паре отличаются только в одном разряде, то они склеиваются. Полученные после склейки наборы показаны стрелками; эти склеиваются. Полученные после склейки наборы показаны стрелками; эти новые наборы располагаются вновь по поясам и снова склеиваются. В результате получился один набор: 0-0-. Оставшиеся несклеенными наборы 0-0-, 00-1, -100, -011, 11-0, 1-11, 111- соответствуют простым конъюнкциям: $f = (\bar{x}_1 \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4) \vee (x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_2 x_3 x_4) \vee (x_1 x_2 \bar{x}_4) \vee (x_1 x_3 x_4) \vee (x_1 x_2 x_3)$. Сложность функции в такой форме стала равной 20.

Второй этап минимизации: метод покрытия таблицы Квайна. Строки этой таблицы соответствуют элементам конъюнкции, полученным на первом этапе; столбцы соответствуют конъюнкциям исходной СДНФ. Элемент (i, j) таблицы равен 1, если нули и единицы, определяющие строку, покрываются соответствующими нулями и единицами, которые определяют столбец. Для вышеприведенной функции построим таблицу Квайна и найдем покрытие:

	0000	0001	0100	0011	0101	1100	1011	1110	1111	
0-0-	1	1	1		1					a
00-1		1		1						b
-100			1			1				c
-011				1			1			d
11-0						1		1		e
1-11							1		1	f
111-								1	1	g

Табл. № 14

В столбце (0000) содержится только одна единица, то есть строка a обязательна, поэтому столбцы (0000), (0001), (0100) и (0101) из рассмотрения можно убрать. Сокращенная таблица имеет вид табл. № 15:

	0011	1100	1011	1110	1111	
00-1	1					b
-100		1				c
-011	1		1			d
11-0		1		1		e
1-11			1		1	f
111				1	1	g

Табл. № 15

Строка b покрывается строкой d, а строка c покрывается строкой e. Убирая, поэтому, строки b и c, получаем таблицу № 16:

	0011	1100	1011	1110	1111	
-011	1		1			d
11-0		1		1		e
1-11			1		1	f
111-				1	1	g

Табл. № 16

Столбцы 0011 и 1100 содержат по одной единице, поэтому строки d и e обязательны. Убрав столбцы (0011),(1100),(1011) и (1110), имеем табл.:

	1111	
1-11	1	f
111-	1	g

Табл. № 17

Строки f и g равноценны. В итоге получаем тупиковую форму $(adef)$, она соответствует тупиковой форме функции $f = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4$. Тупиковой она называется потому, что дальше ее нельзя ни покрыть, ни склеить. Сложность формы равна 11. Заметим, что тупиковых форм может быть несколько, так как покрытие можно производить разными способами. После определения всех тупиковых форм следует выбрать форму с наименьшей сложностью. В нашей форме минимальная сложность равна 11. Часто можно применить скобочную форму и на одну – две единицы уменьшить сложность тупиковой формы. Например, $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_4x_5$ сложности 6 равна $f = x_2(x_1 \vee x_3) \vee (x_4 x_5)$ сложности 5. Алгоритм определения минимальной скобочной формы неизвестен.

9. Минимизация с помощью карт Карно

Карты Карно удобно применять только при малом числе аргументов: при $n \le 4$. Карта строится в форме прямоугольника, квадрата.

	00	01	11	10
00			m	
01		c		
11	b	a	d	t
10		e	n	

Табл. № 18

Рассмотрим квадратную матрицу из $2^4 = 16$ клеток, табл. № 18. Каждая строка соответствует значениям x_1x_2, каждый столбец – значениям x_3x_4. Так, каждой клетке соответствует свой перебор значений $x_1x_2x_3x_4$ из нулей и единиц, который определяет максимальную конъюнкцию СДНФ четырех аргументов. Отметим особенность порядка в расположении нулей и единиц в строках и столбцах. Они расположены так, чтобы просто было найти для каждой клетки всех ее соседей, с которыми можно эту клетку склеить. Например, если в табл. № 18 клетка $a = (1101)$, то соседи ее b, c, d и e следующие: (1100),(0101),(1111) и (1001). Очевидно, что в противоположные клетки в каждой строке (например, b и t), как и в столбце (m и n), также являются соседними.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00			c	d
01	a	b		
11				
10			e	n

Табл. № 19

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11				
10		1		1

Табл. № 20

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00			1	
01	1	1		
11	1	1	1	1
10				

Табл. № 21

Две соседние клетки a и b (табл. № 19) определяют конъюнкцию $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$, так как $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee (\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_4 \vee x_4) = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$. А четыре соседние клетки c, d, e и n могут быть дважды склеены и определяют конъюнкцию $\bar{x}_2x_3$.

Пример. На карте Карно (табл. № 20) клетка (1001) не имеет соседей, поэтому склеить ее невозможно. Склеивая остальные, отмеченные единицами конъюнкции, определяющие функцию СДНФ $f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$, получаем тупиковую форму $f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3$. Сложность после склейки стала C=16 вместо C=28.

Задача. Проверьте, верно ли найдена тупиковая форма по заданной карте Карно, табл. № 22, $f = x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$, а также скобочная форма $f = x_2(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$.

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00			1	
01	1	1		
11	1	1	1	1
10				

Табл. № 22

Замечание. Если в таблице истинности в функции f число единиц значительно больше, чем число нулей, то имеет смысл представить функцию не в СДНФ, а в СКНФ. Однако, пользуясь принципом двойственности формул булевой алгебры, можно в таблице истинности заменить значения функции f единицы на нули и для нее, с уже меньшим количеством единиц, записать СДНФ.

Например, рассмотрим функцию трех аргументов со следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	f	$\bar{f}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

$\bar{f} = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$. После минимизации получаем вид функции в скобочной форме $\bar{f} = x_2(x_1 \vee x_3)$. Чтобы получить схему f, следует на выходе подключить инвертор; то есть отрицание: $f = \overline{x_2(x_1 \vee x_3)}$.

10. Задача синтеза

Логические элементы изображаются графически в виде прямоугольников, имеющих входы и выходы; отрицания представлены кружочками на входах и выходах. Внутри прямоугольника дается обозначение функции: 1- дизъюнкция, &-конъюнкция, М-2 – сложение по модулю 2, ~ - эквивалентность, рис. 6

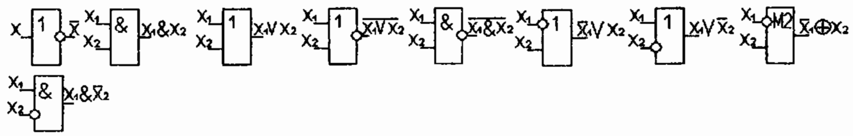


Рис. 6.Условные изображения логических элементов

Основная задача синтеза [2], [4] логических схем состоит в том, чтобы по заданной булевой функции построить многополюсную контактную схему. Задача построения схемы может иметь очень много решений, следует выбрать по какому-то признаку наилучший вариант.

Метод синтеза состоит в следующих последовательных действиях.

1.Заданную функцию $f(x_1x_2...x_n)$ следует представить в форме минимальной сложности по количеству элементов &, ∨, — - в скобочной форме (см. разделы 8, 9).

2.Выразить функции &, ∨, — - в форме суперпозиции базисных функций, построить схемы этих функций (см. рис. 6).

3.Заменить функции &, ∨, — - на эквивалентные блоки, рис. 7.

4.Устранить из схемы двойные отрицания, то есть заменить $\bar{\bar{\varphi}}$ на φ.

Для построения логической схемы в некотором базисе удобна таблица выражения функций – {&, ∨, —}, в некоторых наиболее распространенных базисах, см. табл. 7.

Пример. Выразим функции: &, ∨, — в базисе Пирса (ИЛИ-НЕ) : $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$. Из закона тождественности $\bar{x} = \bar{x} \,\&\, \bar{x}$ и формулы де Моргана $\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ имеем $\bar{x} = \bar{x} \,\&\, \bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$.

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2} = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$

$x_1 \,\&\, x_2 = \bar{\bar{x}}_1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$

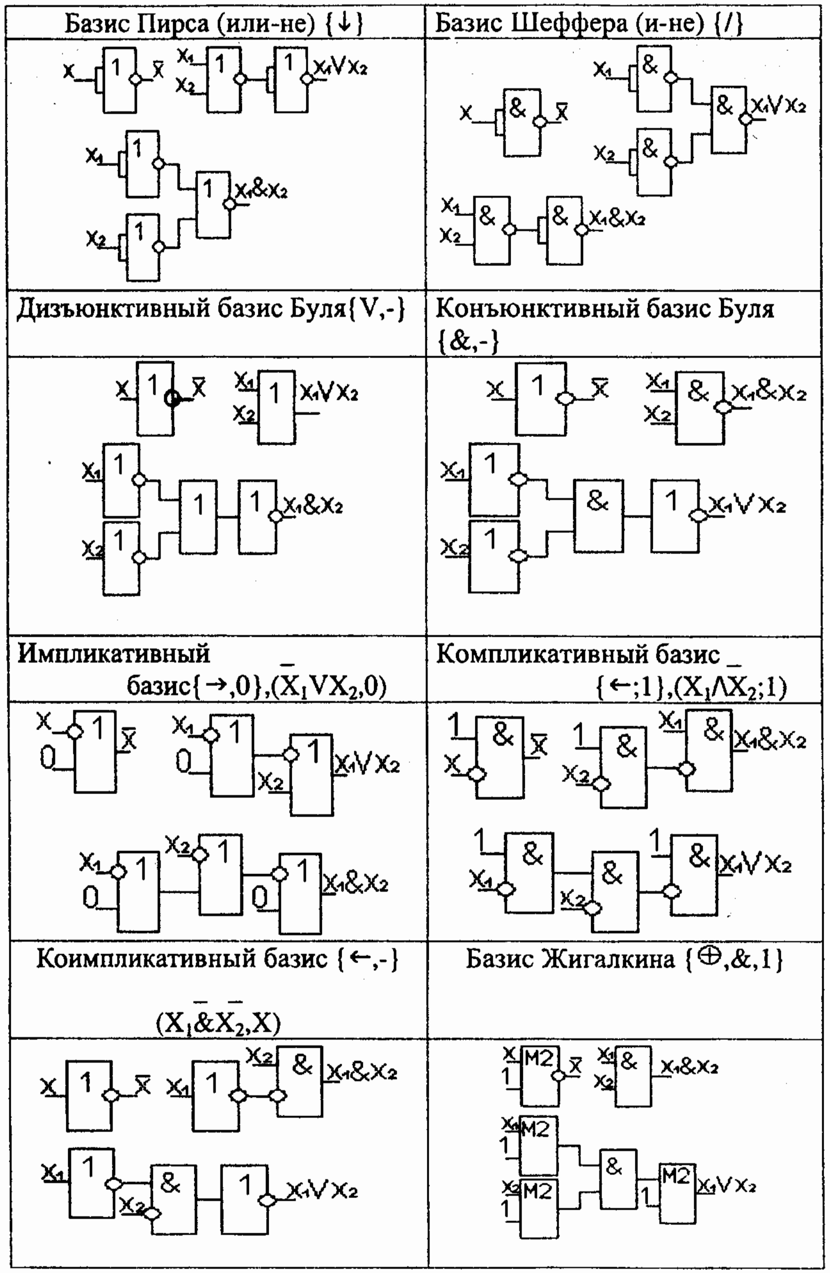


Рис. 7

<u>Пример</u> решения задачи синтеза булевой функции, заданной в форме СНДФ $f=V\{0,2,4,6,7,9,11\}$.

1. Для заданной булевой функции составляем таблицу истинности

$f=V\{0,2,4,6,7,9,11\}=\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{X}_4 \vee \bar{X}_1\bar{X}_2X_3\bar{X}_4 \vee \bar{X}_1X_2\bar{X}_3\bar{X}_4 \vee \bar{X}_1X_2X_3\bar{X}_4 \vee \bar{X}_1X_2X_3X_4 \vee X_1\bar{X}_2\bar{X}_3X_4$

$\vee X_1\bar{X}_2X_3X_4$.

Согласно формуле СНДФ, составляем таблицу истинности:

	X_1	X_2	X_3	X_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1

	X_1	X_2	X_3	X_4	f
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Табл. № 23

2. Составить сокращённую ДНФ. Провести склеивание конъюнкций.

A	0	0	0	0
B	0	0	1	0
	0	1	0	0
C	0	1	1	0
	1	0	0	1
D	0	1	1	1
	1	0	1	1

00-0 → 0--0
0-00
0-10 → 0--0
01-0
011-
10-1

Табл. № 24

Сокращённая ДНФ принимает вид $f=\bar{X}_1\bar{X}_4 \vee \bar{X}_1X_2X_3 \vee X_1\bar{X}_2X_4$.

3. Составляем тупиковую форму методом покрытия. Таблица Вейтча имеет вид:

		0000	0010	0100	0111	0110	1001	1011
a	0--0	1	1	1		1		
b	011-				1	1		
c	10-1						1	1

Табл. № 25

Из таблицы следует, что строки a, b и c являются обязательными, так как каждая из них покрывает единственный столбец. Поэтому записанная сокращённая форма

$f = \bar X_1 \bar X_4 \vee \bar X_1 X_2 X_3 \vee X_1 \bar X_2 X_4$ является тупиковой, причем единственно возможной.

4.Проверяем полученный результат построением таблицы Карне п. 9.

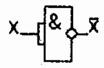
$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1			1
01	1		1	1
11				
10		1	1	

Табл. № 26

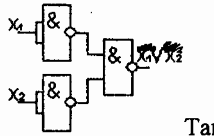
5.Представим полученный результат тупиковой формы в скобочной форме: $f = \bar X_1 \bar X_4 \vee \bar X_1 X_2 X_3 \vee X_1 \bar X_2 X_4 = \bar X_1 (\bar X_4 \vee X_2 X_3) \vee X_1 \bar X_2 X_4$.

6.Выразить функции {V,&,-} в базисе Шеффера $\overline{a \& b}$ (И-НЕ). Базис Шеффера содержит одну базисную функцию.

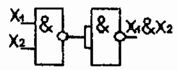
Так как $a \& a = a$ и $\overline{a \& a} = \bar a$, то получаем схему отрицания (инвертора):



Так как $\overline{X_1 \vee X_2} = \bar X_1 \& \bar X_2$ (Формула Де Моргана), то $X_1 \vee X_2 = \overline{\bar X_1 \& \bar X_2}$, отсюда



Так как $X_1 \& X_2 = \overline{\overline{X_1 \& X_2}} = \overline{X_1 / X_2}$, то имеем



7.Начертим логическую схему в скобочной форме через полную систему элементов (V,&,-) :

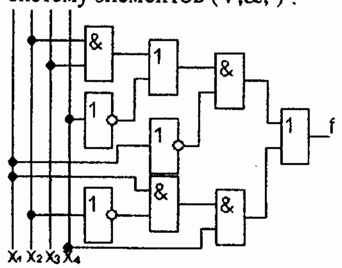


Рис. 8

8. Заменим в схеме элементы {V,&,-} элементами базиса Шеффера :

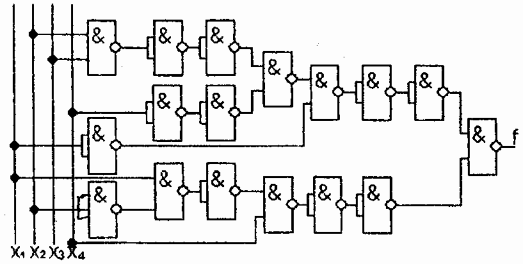


Рис. 9

9. Упростить схему, убрав двойные отрицания

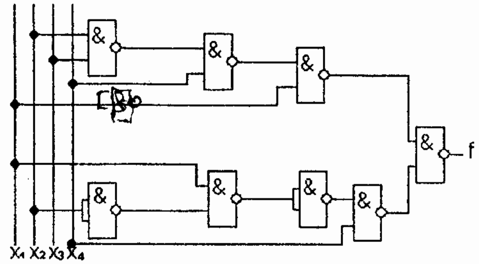


Рис. 10

11. Задачи

№ 1. Чему равно число булевых функций, зависящих от n переменных?

№ 2. Для заданных функций записать таблицу истинности и СДНФ:

а) $f(x_1x_2x_3)$=V(1;3;5;7), б) $f(x_1x_2x_3x_4)$=V(1;4;5;7;10;15);

б) $f(x_1 \ldots x_7)$=V(10,12,31,56,125).

№ 3. Составить таблицу истинности из следующих высказываний:

а) $A \to (A \to B)$; б) $(AVB) \infty (BVA)$; в) $A \to (BVC)$.

№4. Доказать с помощью законов де Моргана и двойного отрицания справедливость другого закона де Моргана.

№5. Найти покрытие следующих таблиц :

	1	2	3	4	5	6	7
a	1			1			1
b	1	1			1		1
c	1				1		
d		1		1		1	
e	1			1	1		
f		1	1				

	1	2	3	4	5	6

a		1		1		
b				1		1
c		1				1
d	1				1	1
e				1		
f	1	1			1	1
g	1					
h				1		1
v	1		1		1	

№6. Пользуясь таблицей Поста,найдите все базисы, состоящие из двух булевых функций двух переменных.

№7. Определить по таблице Поста, какими являются следующие системы функций: полными, базисными, либо ни теми, ни другими:

а) $\{\vee,\oplus,0\}$, в) $\{0,1,\oplus,-\}$, д) $\{0,1,\&,\vee\}$,

б) $\{\to,\oplus\}$, г) $\{0,\&,\vee,\infty\}$, е) $\{\&,\to\}$.

№8. Доказать справедливость законов склеивания и поглощения с помощью законов дистрибутивности и констант 0 и 1.

№9. Сложение двух двоичных чисел связано с двумя булевыми функциями: $S(x,y,z)$ - сложением двух двоичных цифр x и y в i-м разряде с учетом значения z переноса из предыдущего разряда и функцией $\Pi(x,y,z)$ от тех же аргументов, которая равна значению переноса в следующий разряд. Выразить функции S и П в базисе Жигалкина $\{\oplus,\&,1\}$ и начертить схему устройства двоичного сумматра (S – сумматра).

x	y	z	S	П
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблица истинности

№ 10. Подземный бункер, в который ведут три подземных хода, освещается центральной лампой. На каждом из трех выходов имеется переключатель, который может находиться в двух положениях. Обозначим через x_1, x_2, x_3 положение каждого переключателя. Значение функции $f(x_1x_2x_3)$ равно единице, если свет включен, и нуль, если выключен. Найти такую функцию $f(x_1x_2x_3)$,

чтобы можно было включить и выключить лампу каждым из трех переключателей.

Нарисуйте схему устройства в импликативном базисе.

(Указание к решению: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 1$).

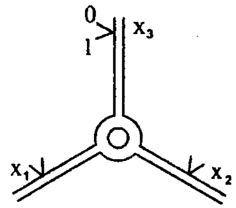


Рис. 11

№ 11. Представить формулой функцию, заданную схемой

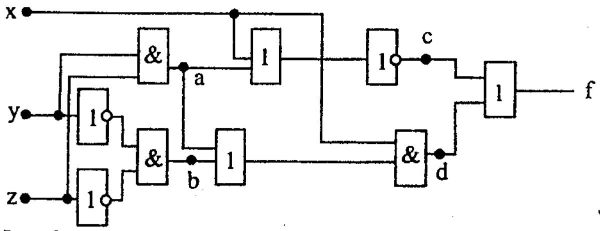


Рис. 12

Решение имеем:

$a = yz$, $b = \overline{yz}$, $c = \overline{x \vee a}$, $d = x(a \vee b)$, $f = c \vee d$.

Отсюда:

$f(xyz) = c \vee d = \overline{x \vee a} \vee x(a \vee b) = \bar{x}\,\bar{a} \vee x(a \vee b) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x(yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) = \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee xyz \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} =$
$\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}\,\bar{z} = \bar{y}(\bar{x} \vee x\bar{z}) \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xyz = \bar{y}(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xyz = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xyz$.

№ 12. Определить, для какого базиса (Шеффера или Пирса) сложность синтезируемой схемы в этом базисе будет меньше для функции

$$f = V(2,4,5,9,10,11,15).$$

№ 13. Синтезировать логическую схему для функции $f(x_1x_2x_3x_4) = V(0,3,7,8,9,10)$ в базисе Жигалкина.

КУРСОВАЯ РАБОТА

Задача №1 курсовой работы

Для заданной функции:

1) Составить таблицу истинности (см. п. 4).
2) Составить СДНФ (см. п. 4).

3) Составить сокращенную ДНФ и упростить ее методом Квайна (см. п. 6).
4) Проверить полученный результат построением карты Карно (см. п. 7).
5) Если возможно, представить результат в скобочной форме (см. п. 6).
6) Построить логическую схему по полученной формуле в скобочной форме (см. п. 8).
7) Выразить функции $\{\vee, \&, -\}$ в заданном базисе (см. п. 5, 8).
8) Заменить в схеме элементы $\{\vee, \&, -\}$ элементами заданного базиса (см. п. 8).
9) Упростить схему, убрав двойные отрицания (см. п. 8).

Вариант	Функция	Базис
1	$\vee(0\ 5\ 6\ 7\ 8\ 13\ 15)$	$\mid$
2	$\vee(0\ 8\ 9\ 11\ 13\ 14\ 15)$	$\downarrow$
3	$\vee(1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 10\ 13)$	$\rightarrow$;0
4	$\vee(2\ 4\ 5\ 10\ 12\ 13\ 15)$	&;–
5	$\vee(0\ 6\ 7\ 8\ 13\ 14\ 15)$	$\oplus$;&;1
6	$\vee(0\ 1\ 4\ 5\ 10\ 13\ 14)$	/
7	$\vee(2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 12\ 15)$	$\downarrow$
8	$\vee(0\ 2\ 8\ 9\ 12\ 13\ 15)$	$\mid$
9	$\vee(0\ 6\ 8\ 10\ 11\ 14\ 15)$	$\rightarrow$;0
10	$\vee(0\ 2\ 5\ 7\ 13\ 14\ 15)$	$\oplus$;&;1
11	$\vee(0\ 2\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15)$	$\downarrow$
12	$\vee(1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 10\ 13)$	/
13	$\vee(0\ 2\ 5\ 6\ 8\ 10\ 13)$	$\mid$
14	$\vee(0\ 5\ 6\ 7\ 8\ 14\ 15)$	$\downarrow$
15	$\vee(4\ 5\ 6\ 9\ 11\ 12\ 14)$	$\rightarrow$;0
16	$\vee(0\ 1\ 2\ 5\ 8\ 9\ 10)$	$\oplus$;&;1
17	$\vee(0\ 2\ 3\ 8\ 10\ 11\ 15)$	$\vee$;–
18	$\vee(1\ 3\ 7\ 9\ 11\ 12\ 14)$	$\rightarrow$;0
19	$\vee(0\ 2\ 4\ 5\ 6\ 9\ 11)$	$\downarrow$
20	$\vee(1\ 3\ 8\ 10\ 12\ 13\ 14)$	/
21	$\vee(2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 12\ 15)$	&;–
22	$\vee(0\ 1\ 5\ 6\ 8\ 9\ 14)$	$\rightarrow$;0
23	$\vee(4\ 5\ 6\ 9\ 11\ 12\ 14)$	/
24	$\vee(0\ 2\ 3\ 4\ 10\ 11\ 15)$	$\downarrow$
25	$\vee(4\ 5\ 6\ 7\ 10\ 11\ 13)$	$\rightarrow$;0
26	$\vee(3\ 5\ 7\ 8\ 11\ 12\ 15)$	$\downarrow$
27	$\vee(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 15)$	$\vee$;–

Табл.№ 27

Задача № 2 курсовой работы

Системы уравнений в булевой алгебре

Пример1.

Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными :

$$\begin{cases}(x\vee y)\to z=0\\(x\downarrow y)\sim z=1\\(x\oplus\overline{y})\overline{z}=1\end{cases}$$

Для каждой функции, стоящей в левой части каждого уравнения, составляем таблицу истинности:

x	y	z	$(x\vee y)\to z$	$(x\downarrow y)\sim z$	$(x\oplus\overline{y})\overline{z}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Табл. № 28

Последовательно просматривая элементы каждой из строк таблицы истинности в 4-м, 5-м и 6-м столбцах, ищем те строки, которые равны 0,1,1(соответственно в столбцах 4,5 и 6).Если такие строки имеются, то эти числа равны правым частям 1-го, 2-го и 3-го уравнения заданной системы. В нашем случае это предпоследняя строка матрицы. Соответствующие этой строке аргументы (x,y,z) равны $(1,1,0)$. Таким образом,данная система имеет только одно решение $x=1$, $y=1$, $z=0$. Если бы такой строки не нашлось, то система была бы несовместна.

Проверка. Подставляем найденный ответ $(xyz)=(110)$ в заданную систему уравнений. Получаем тождество:

$$\begin{cases}(1\vee 1)\to 0=0\\(1\downarrow 1)\sim 0=1\\(1\oplus 0)1=1\end{cases}$$

В некоторых случаях задачу можно упростить методом исключения неизвестных, когда из отдельных уравнений можно найти значения неизвестных и подставить в остальные уравнения.

Пример2. Решим систему логических уравнений :

$$\begin{cases} (x \vee y) \to z = 1 & 1 \\ (x \vee z) y = 1 & 2 \\ (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = 1 & 3 \end{cases}$$

Выразим все функции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$$\begin{cases} (\overline{x \vee y}) \vee z = 1 \\ (x \vee z) y = 1 \\ (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $y = 1$. Подставляем значение $y = 1$ во все уравнения. Имеем :

1) $(\overline{x \vee 1}) \vee z = o \vee z = 1$
2) $x \vee z = 1$
3) $\bar{x} \vee o \vee \bar{z} = 1$

Из уравнения 1 имеем $z = 1$. Из уравнения 3 получаем $x \vee o \vee o = 1$.Отсюда $x = 1$.
Ответ: (1;1;1).

Задание № 2 курсовой работы

1) $(x \sim y)z = 0$ $(\bar{x} \to y) \sim \bar{z} = 1$ $\bar{z} \mid (x \leftarrow y) = 0$	2) $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 1$ $(x \vee y) \to z = 0$ $z \to (x \downarrow \bar{y}) = 1$	3) $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 0$ $\bar{z} \mid (x \leftarrow y) = 0$ $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 1$
4) $(x \sim y)z = 1$ $z \sim (x / y) = 0$ $(x \sim y) \to z = 1$	5) $(x \oplus y)z = 1$ $(x \vee z)y = 1$ $(x \vee y) \to z = 1$	6) $(x \oplus y) \oplus \bar{z} = 1$ $(\bar{x} \to y) \sim \bar{z} = 1$ $(x \sim y)z = 0$
7) $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 0$ $z \to (x \downarrow \bar{y}) = 1$ $(x \downarrow y) \sim z = 1$	8) $(x \sim y) \to z = 1$ $\bar{z}(x \leftarrow y) = 0$ $x \vee \bar{y} \vee z = 1$	9) $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 0$ $z \sim (x / y) = 1$ $(x \oplus y) \oplus \bar{z} = 1$
10) $(\bar{x} \to y) \sim \bar{z} = 1$ $(x \sim y)z = 1$ $(x \vee z)y = 0$	11) $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 0$ $x \vee \bar{y} \vee \bar{z} = 0$ $(x \sim y)z = 0$	12) $(x \oplus y)z = 1$ $(x \vee y) \to z = 1$ $z \to (x \downarrow \bar{y}) = 1$
13) $\bar{z} \mid (x \leftarrow y) = 0$ $(\bar{x} \to y) \sim \bar{z} = 1$ $(x \downarrow y) \sim z = 1$	14) $(x \oplus y)z = 0$ $(x \downarrow \bar{y}) \sim \bar{z} = 1$ $(x \sim y)z = 1$	15) $z \sim (x / y) = 1$ $(x \sim y)z = 1$ $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 0$
16) $\bar{z} \to (x / \bar{y}) = 1$ $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 1$ $(x \oplus y) \oplus \bar{z} = 1$	17) $(x \downarrow y) \sim z = 1$ $(x \sim y) \to z = 0$ $(x \vee z)y = 1$	18) $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 1$ $(x \sim y)z = 0$ $x \vee \bar{y} \vee \bar{z} = 1$
19) $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 0$ $(x \oplus y)\bar{z} = 0$ $y \oplus 1 = 0$	20) $(x \oplus y)\bar{z} = 0$ $(x \oplus y \oplus \bar{z} = 1$ $(x \vee y) \to z = 0$	21) $y \oplus 1 = 1$ $z \sim (x / y) = 1$ $(x \oplus y)z = 1$

22) $(x \sim y) \sim z = 0$ $(x \vee z)y = 1$ $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 1$	23) $(x \vee y) \to z = 1$ $(x \downarrow y) \sim z = 1$ $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 1$	24) $(x \sim y)z = 0$ $(x \sim y) \to z = 1$ $(x \vee \bar{y}) \vee z = 0$
25) $(x \downarrow y) \sim z = 1$ $(\bar{x} \sim \bar{y}) \to z = 1$ $\bar{z} \mid (x \leftarrow y) = 0$	26) $(\bar{x} \to y) \sim \bar{z} = 1$ $y \oplus 1 = 0$ $\bar{z} \mid (x \leftarrow y) = 0$	27) $(x \vee y) \to z = 0$ $z \sim (x / y) = 1$ $(x \oplus \bar{y})\bar{z} = 1$
28) $x \oplus y \oplus \bar{z} = 1$ $(\bar{x} \to y) \sim \bar{z} = 1$ $\bar{z} \mid (x \leftarrow y) = 1$		

Табл. № 29

Задача № 3 курсовой работы

Рассмотрим задачи, составленные на основе логических высказываний. Любое высказывание может быть представлено в форме логических операций. Рассмотрим пример :

A – идет дождь; В – дует ветер.

Логические операции	Высказывания
$A \& B$	Идет дождь и дует ветер
$A \vee B$	Идет дождь или дует ветер
$\bar{A}$	Дождь не идет
$A \to B$	Если идет дождь, то дует ветер
$A \oplus B$	Либо идет дождь, либо дует ветер
$A \sim B$	Дождь идет тогда и только тогда, когда дует ветер
$A \leftarrow B$	Неверно, что если идет дождь, то дует ветер
$A \downarrow B$	Неверно, что идет дождь или дует ветер
A / B	Неверно, что идет дождь и дует ветер
$B \leftarrow A$	Неверно, что если дует ветер, то идет дождь

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \oplus B$	$A \sim B$	$A \leftarrow B$	$A \downarrow B$	A / B	$B \leftarrow A$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0

Табл. № 30

Задача. В некоторой промышленной системе работают пять объектов, связанных друг с другом: x, y, z, u, v. Разработать сигналы, по которым часть объектов должна быть остановлена, если заданы условия работы:

1. Если x работает, то работает и y;
2. Хотя бы один из объектов u или v должен обязательно работать;
3. Если объекты z и u будут работать, то только вместе;
4. Из двух объектов y и z должен работать только один;
5. Если объект v будет включен, то он может работать при включении и x и u.

Решение. Составим систему логических уравнений:

$$\begin{cases} 1) x \to y = 1 \\ 2) u \vee v = 1 \\ 3) z \,\&\, u = 1 \\ 4) y \oplus z = 1 \\ 5) v \to (u \,\&\, x) = 1 \end{cases}$$

Решим систему методом последовательного исключения неизвестных.
Уравнение 3) выполняется только тогда, когда $u = 1$ и $z = 1$.
Подставляем эти значения в остальные уравнения. Получаем систему из четырех уравнений:
1) $x \to y = 1$; 4) $y \oplus 1 = 1$;
2) $1 \vee v = 1$; 5) $v \to (1 \,\&\, x) = 1$.
Из уравнения 4) по таблице № 30 находим $y = 0$. Уравнение 2) выполняется при любых значениях v.
Из уравнения 1), которое после подстановки $y = 1$ принимает вид $x \to 1 = 1$, находим $x = 0$.
Оставшееся уравнение 5) имеет вид:
5) $v \to (1 \,\&\, 0) = 1$ или $v \to 0 = 1$.
Из 5) находим $v = 0$.
Ответ: $(xyzuv) = (0,0,1,1,0)$, т.е. в системе работают только объекты z и u.
Ту же задачу можно решить с помощью таблицы истинности, которая при пяти аргументах должна состоять из $2^5 = 32$ строк. Однако, если третье уравнение $z \,\&\, u = 1$, из которого следует, что $z = u = 1$, систему можно упростить:

$$\begin{cases} x \to y = 1 \\ y \oplus 1 = 1 \\ v \to (x \cdot 1) = 1 \end{cases}$$

v

x	y	v	$x \to y$	$y \oplus 1$	$v \to x$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Табл. № 31

В столбцах проставлены значения четырех функций, которые являются левыми частями системы с тремя аргументами x, y, v. Только при одной комбинации аргументов $x = y = v = 0$ функции равны, соответственно, 1; 1; 1. Следовательно, ответ (0,0,1,1,0) подтвердился.

Задание № 3 курсовой работы

Электронная система состоит из четырех агрегатов: а, в, с, d, работа которых должна быть с какого-то момента связана между собой. Ниже

приведены варианты логических связей работы этих агрегатов. В задаче требуется найти, какие из агрегатов должны работать (1), а какие простаивать (0).

1) 1) Если работает агрегат «а», то работает агрегат «в».
2) Неверно, что работает «в» или агрегат «с».
3) «d» работает тогда и только тогда, когда работает «с».
4) Если работает «с», то работают «а» и «d».

2) 1) Если работает агрегат «а», то работает «в».
2) Неверно, что работает агрегат «в» и работает «с».
3) Неверно, что работает «а» и работает «в».
4) Либо работает «с», либо «d».

3) 1) Неверно, что работает «в» или работает «с».
2) Неверно, что работает «а» и работает «в».
3) Если работает «а», то работает «в».
4) Работает агрегат «d» или агрегат «с».

4) 1) Если работает агрегат «с», то работают «d» и «а».
2) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает «с».
3) Либо работает «в», либо работает «с».
4) Если работает «а», то работает «в».

5) 1) Работает «d» или работает «с».
2) Либо работает «в», либо работает «с».
3) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает «с».
4) Если работает агрегат «с», то работают «а» и «d».

6) 1) Если работает агрегат «а», то работает «в».
2) Работает агрегат «а», или работает агрегат «с».
3) Либо работает «в», либо работает «с».
4) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».

7) 1) Либо работает агрегат «в», либо работает «с».
2) Работает «d» или работает «с».
3) Если работает «а», то работает «в».
4) Если работает «с», то работают «d» и «а».

8) 1) Работает агрегат «а» или агрегат «с».
2) Если работает «а», то работает «в».
3) Если работает агрегат «с», то работают «а» и «d».
4) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает «с».

9) 1) Если работает агрегат «а», то работает «в».
2) Либо работает агрегат «а», либо агрегат «в».
3) Работает агрегат «d» или работает агрегат «с».
4) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает «d».

10) 1) Если работает агрегат «а», то работает либо «в», либо «с».
2) Неверно, что работает «в» или работает «с».
3) Если работает «а», то работает агрегат «в».
4) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».

11) 1) Работают агрегаты «в» или «с».
2) Неверно, что работает агрегат «а» и работает агрегат «в».
3) Если работает «а», то работает агрегат «в».
4) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».
5) Работает агрегат «d» или работает агрегат «с».
6) Работают либо «в», либо «с».

12) 1) Либо работает агрегат «с», либо работает агрегат «а».
2) Неверно, что работает «в» или агрегат «с».
3) Если работает агрегат «с», то работает «в».
4) Работает «d» или работает «с».

13) 1) Неверно, что работают агрегаты «а» и «в».
2) Либо работает «в», либо работает «с».
3) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».
4) Если работает «в», то работает «с».
5) Либо работает «а»,либо работает «в».

14) 1) Если работает «а»,то работает «в».
2) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «в».
3) Если работает агрегат «в»,то работает агрегат «с».
4) Либо работает агрегат «в», либо агрегат «d».

15) 1) Неверно, что работает агрегат «в» или работает «с».
2) Работает агрегат «d»или работает агрегат «с».
3) Если работает агрегат «с»,то работает «а» и «d».
4) Либо работает агрегат «а»,либо работает агрегат «в».

16) 1) Либо работает агрегат «а»,либо работает агрегат «d».
2) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «в».
3) Если работает агрегат «с»,то работают агрегат «d» и агрегат «а».
4) Если работает агрегат «с»,то работает агрегат «d».

17) 1) Если работает агрегат «а»,то работает агрегат «в».

2) Либо работает агрегат «в»,либо работает агрегат «с».
3) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».
4) Агрегат «а» работает или работает агрегат «в».

18) 1) Если работает агрегат «а»,то работает агрегат «в».
2) Либо работает агрегат «в»,либо работает агрегат «с».
3) Агрегат «а»работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».
4) Если работает агрегат «с», то работает агрегат «d».

19) 1) Неверно, что работает агрегат «в» или работает «с».
2) Работает «d»тогда и только тогда, когда работает «с».
3) Работает «в» тогда и только тогда, когда работает «с».
4) Либо работает агрегат «а»,либо работает агрегат «в».

20) 1) Если работает агрегат «в»,то работает агрегат «с».
2) Если работает агрегат «с»,то работает агрегат «d».
3) Агрегат «в» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».
4) Либо работает агрегат «с»,либо работает агрегат «d».
5) Либо работает «а»,либо работает «d».

21) 1) Неверно, что работает агрегат «в» или работает агрегат «с».
2) Если работает агрегат «в»,то работает агрегат «с».
3) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «в».
4) Агрегат «в» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».

22) 1) Неверно, что работает агрегат «в» или работает агрегат «с».
2) Агрегат «d»работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».
3) Если работает агрегат «в»,то работает агрегат «с».
4) Либо работает агрегат «а»,либо работает агрегат «в».

23) 1) Если работает агрегат «в»,то работает агрегат «с».
2) Работает агрегат «а» или работает агрегат «в».
3) Если работает агрегат «с»,то работают агрегаты «а» и «d».
4) Агрегат «в» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».
5) Агрегат «d» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».

24) 1) Либо работает агрегат «с»,либо работает агрегат «d».
2) Если работает агрегат «с»,то работает агрегат «d».
3) Если работает агрегат «а»,то работает агрегат «в».
4) Если работает агрегат «в»,то работает агрегат «с».
5) Агрегат «в» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «с».

25) 1) Либо работает агрегат «в»,либо работает агрегат «с».
2) Неверно, что если работает агрегат «а»,то работает агрегат «в».

3) Либо работает агрегат «в», либо работает агрегат «d».
4) Или работает агрегат «а», или агрегат «в», или оба вместе.

26) 1) Либо работает агрегат «в», либо работает агрегат «d».
2) Неверно, что работает агрегат «а» или работает агрегат «в».
3) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».
4) Если работает агрегат «в», то работает агрегат «с».
5) Либо работает агрегат «а», либо работает агрегат «с».

27) 1) Неверно, что работает агрегат «с» или работает агрегат «d».
2) Либо работает агрегат «в», либо работает агрегат «с».
3) Неверно, что если работает агрегат «а», то работает агрегат «в».
4) Агрегат «в» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».

28) 1) Работает агрегат «d» или агрегат «с».
2) Либо работает агрегат «а», либо работает агрегат «в».
3) Если работает агрегат «в», то работает агрегат «с».
4) Агрегат «а» работает тогда и только тогда, когда работает агрегат «d».
5) Если «с», то «d».

Задача № 4 курсовой работы

Пример. Работник учебного отдела института составляет расписание занятий на первые четыре пары для некоторой группы. Занятия должны проводиться по математике («М»), физике («Ф»), информатике («И») и электротехнике («Э»). Всего возможны 4!=24 различных порядков занятий.

1). Математику и информатику проводит один преподаватель, поэтому «М» и «И» должны стоять рядом.

2)Если физика не первое занятие, то второй должна быть математика или информатика.

3) На второй паре электротехник проводит занятия в другой группе.

4)Физик отказывается проводить занятие после информатики.

5) Физик не может преподавать на четвертой паре.

	1	2	3	4	5
МФЭИ	0	0	1	1	1
МФИЭ	0	0	1	1	1
МИФЭ	1	1	1	0	1
МИЭФ	1	1	1	1	0
МЭФИ	0	0	0	1	1
МЭИФ	0	0	0	0	0
ФМЭИ	0	0	1	1	1
ФМИЭ	1	0	1	1	1
ФЭМИ	1	0	0	1	1
ФЭИМ	1	0	0	1	1
ФИЭМ	0	0	1	1	1
ФИМЭ	1	0	1	1	1
ЭМФИ	0	1	1	1	1
ЭМИФ	1	1	1	0	0
ЭФМИ	1	0	1	1	1
ЭФИМ	1	0	1	1	1
ЭИМФ	1	1	1	1	0
ЭИФМ	0	1	1	0	1
ИМЭФ	1	1	1	1	0
ИМФЭ	1	1	1	1	1
ИФМЭ	0	0	1	0	1
ИФЭМ	0	0	1	0	1
ИЭМФ	0	0	0	1	0
ИЭФМ	0	0	0	1	1

Табл. № 32

Составляем таблицу всех возможных порядков проведения занятий. Единицами отмечаем те условия, которые удовлетворяются в данном переборе. Например, при порядке занятий МФЭИ проставленные цифры 00111 означают, что условия 1 и 2 не удовлетворяются, а условия 3,4 и 5 удовлетворяются.

Из таблицы следует, что в сроке ИМФЭ, которая отмечена галочкой, все условия выполнены.

Задание № 4 семестровой курсовой работы.
(Задача на размещение)

На автоматической линии при изготовлении некоторого изделия следует произвести четыре операции: «а», «в», «с» и «d».
На порядок выполнения этих операций накладываются условия, приведенные в каждом варианте.
Найти порядок выполнения операций.

Логические задачи на размещение

1. 1) Операция «в» выполняется после выполнения операции «с».
2) Если операция «d» на первом месте, то операция «с» на четвертом или втором местах.
3) Операция «в» должна быть сделана ранее операции «а».

2. 1) Операция «в» должна выполняться позже операции «с».
2) Если «d» на втором месте, то «а» на третьем или на четвертом местах.

3) Операция «а» должна выполняться позже операции «с».
4) Если «а» на первом месте, то «в» либо на втором, либо на четвертом местах.

3. 1) Операция «с» либо вторая, либо четвертая.
2) После операции «d» следует операция «а».
3) Если «а» не первая операция, то третьей операцией является «в».

4. 1) Операция «с» не может быть ни первой,ни последней операцией.
2) Операция «в» может быть сделана только тогда, когда уже сделана операция «d».
3) Операция «а» должна быть сделана непосредственно после «в».

5. 1) После операции «в» следует операция «а» или «d».
2) Операция «d» находится либо на первом, либо на последнем месте.
3) Операция «с» производится раньше операции «а».
4) Между операциями «а» и «d» производится только одна операция.

6. 1) После операции «а» следует или операция «d», или «с».
2) Операция «в» делается раньше операции «d».
3) Между операциями «d» и «с» производится только одна операция.
4) Операция «с» находится или на первом, или на последнем месте.

7. 1) Операция «а» может быть второй или четвертой.
2) Операция «в» производится позже операции «d».
3) После операции «с» могут быть только операции «а» или «d».
4) Между операциями «в» и «d» производится только одна операция.

8. 1) Операция «в» производится или второй, или четвертой.
2) Операция «а» не может быть произведена ранее операции «с».
3) Операция «d» не может быть второй.
4) Между операциями «d» и «а» находится только одна операция.

9. 1) Операция «d» не может быть третьей.
2) Операция «а» не может быть произведена ранее операции «с».
3) Если операция «в» производится на первом месте, то операция «с» либо на третьем, либо на четвертом месте.
4) Операция «d» непосредственно следует за операцией «а».
5) Между операциями «в» и «d» производится одна операция.

10. 1) Операция «а» выполняется тогда и только тогда, когда ранее выполнена операция «d».
2) Операция «с» следует сразу после операции «в».
3) Операция «с» не может быть второй.

4) Между операциями «а» и «с» производится одна операция.

11. 1) Операция «а» выполняется сразу после операции «d» или «с».
2) Операция «в» не может быть четвертой.
3) Операция «в» выполняется тогда, когда ранее выполнена операция «d».
4) Операция «а» выполняется тогда, когда выполнена операция «в».

12. 1) Операция «в» может быть или второй, или четвертой.
2) Между операциями «а» и «d» производится одна операция.
3) Операция «с» должна быть либо первой, либо второй.

13. 1) Операция «в» не может быть третьей.
2) Операция «а» производится при уже выполненной операции «d».
3) Непосредственно перед операцией «с» не может быть операции «d».
4) Операция «а» может быть или первой, или четвертой.
5) Между операциями «в» и «а» может быть произведена только одна операция.

14. 1) Операция «d» может быть произведена только после операции «в».
2) Между операциями «а» и «d» проделывается только одна операция.
3) Операция «с» производится позже операции «а».

15. 1) Операция «d» производится непосредственно после «а».
2) Операция «в» не может быть первой или четвертой.
3) Операция «а» делается позже операции «с».

16. 1) Операция «в» не должна быть третьей, если второй будет операция «а».
2) Операция «d» делается позже операции «с».
3) Операция «с» не должна быть первой.
4) Операция «d» может быть либо третьей, либо четвертой.
5) Операция «d» выполняется непосредственно за операцией «а».

17. 1) Операция «а» не должна быть ни второй, ни четвертой.
2) Операция «d» не должна следовать за «в»,а «d» за «а».
3) Операция «в» может быть сделана, если сделана операция «с».
4) Операция «d» выполняется сразу после операции «с».

18. 1) После операции «d» следует операция «в».
2) После операции «а» не должно быть операции «d».
3) Операция «с» находится либо на первом, либо на последнем месте.

19. 1) Операция «а» должна делаться после операции «в».

2) Если операция «с» на первом месте, то операция «в» либо на втором, либо на четвертом.
3) Операция «а» производится раньше операции «d».

20. 1) Если операция «в» на первом месте, то «а» должна быть на четвертом.
2) Если «d» на первом месте, то «а» либо на втором, либо на четвертом местах.
3) Если «с» на втором месте, то «d» на третьем или четвертом местах.
4) Операция «а» должна производиться позже операции «в».
5) Операция «d» должна быть позже операции «в».

21. 1) Если операция «d» не первая операция, то третья операция «а».
2) Операция «в» либо вторая, либо четвертая.
3) Операция «d» непосредственно следует за операцией «с».

22. 1) Если операция «в» на втором месте, то операция «d» на третьем.
2) Если операция «а» на первом месте, то «d» на третьем или на четвертом месте.
3) Операция «d» производится после операции «в».

23. 1) Если первая операция «а», то третья операция не «в» и не «d».
2) Операция «d» либо на втором месте, либо на четвертом.
3) Если третья операция не «а», то на четвертом месте производится операция «d».

24. 1) Операция «с» выполняется только после выполнения операции «d» или «а».
2) После операции «в» нельзя производить ни операцию «с», ни операцию «d».
3) После операции «а» должна следовать операция «d».

25. 1) Операция «d» может быть сделана тогда и только тогда, когда уже сделана операция «а».
2) Операция «в» должна быть сделана непосредственно после операции «с».
3) Операция «d» не может быть первой и последней операцией.

26. 1) Операция «а» непосредственно следует за операцией «в».
2) Операция «в» не может быть сделана ранее операции «d».
3) Операция «а» не может быть третьей.
4) Если операция «с» на первом месте, то операция «d» либо на третьем, либо на четвертом месте.
5) Между операциями «с» и «а» находится одна операция.

27. 1) Операция «d» не может быть второй.
2) Между операциями «а» и «с» делается одна операция.
3) Операция «в» выполняется тогда и только тогда, когда выполнена операция «а».
4) Операция «с» следует сразу после операции «в» или после операции «d».

28. 1) Операция «а» выполняется непосредственно за операцией «в».
2) Операция «d» не должна быть первой.
3) Операция «d» делается ранее операции «а».
4) Операция «с» не должна быть третьей, если второй операцией будет «в», операция «а» может быть либо третьей, либо четвертой.

Литература:

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский. Дискретная математика для инженеров.- М.: Энергия , 1980.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики.-М.: Высшая школа , 1986.
3. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров.-М.: Радио и связь , 1984.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.-М.: Наука , 1986.
5. Евреинов Э.В. (под редакцией) Цифровая и вычислительная техника .- М.: Радио и связь , 1991.